



udp UNIVERSIDAD
DIEGO PORTALES



**UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO**

CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN AULAS DE ENSEÑANZA BÁSICA ENTORNOS DIDÁCTICOS QUE POSIBILITAN SU DESARROLLO

PAULINA ARAYA ERICES

Tesis para optar al Grado de Doctor en Educación

Profesor tutor: Paula Louzano Baptista

FACULTAD DE EDUCACIÓN UNIVERSIDAD ALBERTO HURTADO
FACULTAD DE EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES

Santiago, Chile
2020

© 2020, Paulina Araya Erices

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo siempre la cita bibliográfica del presente documento y su autor.

AGRADECIMIENTOS

Una tesis es un trabajo personal que, como todo lo personal, es más colectivo de lo que parece. En este espacio quiero agradecer a quienes contribuyeron directa e indirectamente en este proceso.

Partiendo por los reconocimientos institucionales agradezco a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) por entregarme su apoyo mediante la Beca de Doctorado Nacional. A la Comisión Nacional de Educación (CNED), por apoyar la realización del terreno de esta tesis. Al proyecto FONDEF “Modelo de desarrollo de habilidades matemáticas y de gestión de aprendizajes matemáticos para la formación inicial docente en educación básica” y a su director, Eugenio Chandía, por apoyar mi desempeño como tesista y, finalmente, al programa de Doctorado en Educación por la formación rigurosa y dedicada.

A modo personal, agradezco especialmente a mi comisión de tesis, por todas las horas invertidas en leer, escuchar y retroalimentar este trabajo. Sus críticas y sugerencias han sido muy valiosas en el curso de esta investigación, y más en general, en mi formación como investigadora. A mi tutora, Paula Louzano, por saber guiar esta tesis dándome la libertad y confianza necesarias para concretar este trabajo, creyendo en mis capacidades y con un trato horizontal que aprecio mucho. A Salomé Martínez por estar presente desde el comienzo de este proceso, aportando con comentarios precisos y agudos que han robustecido fuertemente la tesis. A Renato Gazmuri, por ser parte crucial de la formulación del proyecto sin siquiera proponérselo. Además, por conformar la comisión con apertura, y por la buena onda y el rigor, que no son excluyentes.

Agradezco a María Leonor Varas por introducirme en esto de la investigación en educación. Su formación pre doctoral fue clave para ser aceptada, becada y (espero) graduada de este programa. Sin su guía inicial no se habría pasado por mi mente dedicarme a esto que me hace tan feliz.

A la memoria de Sebastián Howard, agradezco su apoyo en la construcción del proyecto de tesis y el impulso para postular al fondo del CNED. Sin esa sugerencia el terreno de esta tesis

no habría sido posible. Le agradezco, además, su valiosa compañía en el proceso de entrar al mundo de las humanidades viniendo de las matemáticas.

Agradezco a todas las personas que conforman el doctorado, en especial a María Teresa Rojas y María Isabel Toledo, por su valioso trabajo en la formación de doctorantes. A mis compañeras/os, por ser parte fundamental de este proceso, por la amistad y el aprendizaje mutuo. Especial agradecimiento a Muriel, por ser mi amiga, confidente y por dedicar tantas horas en discutir sobre este trabajo y su vínculo con lo que nos importa en la vida.

A mis amigas. Agradezco a Mariví Martínez y Valentina Giaconi, por apoyar la postulación al proyecto CNED, a la Vale por ser mi experta en datos de cabecera y a Mariví por ser mi consejera y gurú espiritual. A Bárbara Burger por llevar a cabo la coordinación del terreno. Proceso difícil y donde desplegó todas sus super habilidades. A Carmen Gloria Espinoza y a Carmen Luz Sepúlveda, “mis Carmencitas”, por su apoyo de años, siempre felices por mis alegrías y acompañándome en mis turbulencias. A Patricia Ojeda, Patita, por estar presente siempre, por estar tan orgullosa de mí como yo de ella y por ser la ñoña más estilosa que conozco. A Paula Jouannet, por ayudarme a tejer ideas y planes futuros para que esto que estudiamos sirva al mundo. Son una inspiración para mí.

A mi familia. Agradezco a mi santa madre, por el apoyo y las velitas de bruja que hacen realidad lo imposible. A mi papá, por nunca poner expectativas ajenas sobre mis hombros y siempre apoyar mis capacidades. A ambos, por ser los tatas de Antuel, amarlo y cuidarlo tantas veces, sin su ayuda no tendría ni tesis ni vida social. A mi hermanito, la segunda persona que más amo en esta vida, por estar siempre a mi lado y ser el más talentoso.

A Antuel, por enseñarme el amor, por ser en algún sentido todos los niños del mundo, por mostrarme la alegría de crecer, por recordarme la importancia de que todas las infancias, sobre todo las más vulneradas, puedan disfrutar del descubrir e imaginar mundos posibles, por ser la motivación más persistente y el apoyo más incondicional.

RESUMEN

La *creatividad matemática* se relaciona con la capacidad de crear ideas, ya sea soluciones, relaciones o preguntas en el ámbito matemático. El desarrollo de esta habilidad en todos los niveles educativos se considera importante para fomentar las capacidades de las personas para usar las matemáticas en ámbitos cotidianos, profesionales y científicos. Pese a que se conoce que distintos factores asociados a la educación formal e informal inciden en la creatividad matemática, la forma en que los ambientes educativos pueden contribuir a su desarrollo es un tema de gran interés y aun poco estudiado. Por lo anterior la presente investigación se propuso comprender la forma en que los *entornos didácticos* afectan la creatividad matemática de estudiantes chilenos de 5° año básico.

Para ello se empleó un diseño metodológico mixto secuencial explicativo (Creswell, 2014). En la primera fase cuantitativa, se evaluó la creatividad matemática de 576 estudiantes de 5° básico de 21 cursos de la Región Metropolitana a partir de un test con ítems de soluciones múltiples. Por otro lado, se analizaron las dinámicas de la clase de estos cursos mediante una pauta basada en el modelo de análisis de entornos didácticos (Sarrazy & Novotná, 2013). Mediante un análisis de clusters se obtuvieron dos grupos de entornos didácticos a los que nombramos *entornos activos*, con mayores puntajes promedio en todas las dimensiones evaluadas, y *entornos reproductivos*, con menores puntajes. Para explicitar la relación entre los entornos didácticos y la creatividad matemática se emplearon modelos multinivel, controlando las variables género, nivel socioeconómico, perfil del colegio y resultado en la prueba SIMCE de matemática del curso.

En la segunda fase cualitativa, se ahondó en la descripción de las maneras en que los distintos tipos de entornos didácticos actuaban favoreciendo o inhibiendo la creatividad de los estudiantes en la clase. Se realizó un estudio de dos casos paradigmáticos, un curso representante de los entornos activos y otro curso representante de los entornos reproductivos. Los casos se analizaron a partir de categorías a priori y emergentes.

Los resultados de la fase cuantitativa mostraron que el efecto del aula contribuyó a explicar un 16% de la varianza total en la creatividad matemática de los alumnos participantes. Una vez que se incorporaron las variables de control, se observó que aquellos alumnos que estuvieron en un *entorno didáctico activo*, con una enseñanza caracterizada por involucrarlos en la construcción de ideas y cuyos profesores mostraron una mayor capacidad para variar la dificultad de los problemas matemáticos, obtuvieron puntajes de creatividad matemática significativamente más altos que sus pares que estuvieron en *entornos reproductivos*. Sobre la influencia de las variables de control se obtuvo que el nivel socioeconómico y el género tuvieron un efecto significativo sobre los puntajes de los estudiantes en el test, favoreciendo al nivel socioeconómico alto y a las niñas. No se obtuvieron resultados concluyentes sobre el efecto del SIMCE ni sobre el perfil de la escuela.

Los hallazgos de la fase cualitativa permitieron describir cómo las dimensiones de los entornos didácticos consideradas en el estudio actuaban de forma integrada para propiciar o limitar el surgimiento de la creatividad en el aula. Al mismo tiempo se identificaron nuevas dimensiones que permitieron complementar el modelo considerado inicialmente. En específico, la implementación de tareas desafiantes seguidas de tiempo suficiente para la resolución, una institucionalización que incorpora las ideas de los estudiantes,

retroalimentaciones que promuevan una disposición activa, promoción del razonamiento, análisis colectivo de los errores que promuevan la reflexión y la comunicación entre pares y con el profesor favorecen el surgimiento de ideas matemáticas creativas en el aula.

En conclusión, se identifican aspectos de la enseñanza caracterizados bajo el concepto de entornos didácticos activos. Estos entornos presentan elementos que actúan de forma integrada y sistémica para promover el pensamiento matemático creativo de los estudiantes. Si bien, la influencia del aula es acotada y pequeña en comparación con otros elementos de mayor influencia como el nivel socioeconómico, constituye un espacio de acción donde el desarrollo de habilidades docentes para la generación de entornos didácticos activos resulta ampliamente deseable.

TABLA DE CONTENIDOS

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	19
2.1. Objetivo general	19
2.2. Objetivos específicos	19
3. MARCO TEÓRICO	20
3.1. Creatividad matemática	21
3.1.1. Creatividad	21
3.1.1.1. Definiciones de creatividad	21
3.1.1.2. Los distintos niveles de la creatividad	24
3.1.1.3. Generalidad o especificidad del dominio	25
3.1.2. Creatividad matemática	27
3.1.2.1. Importancia del pensamiento creativo para el desarrollo matemático	27
3.1.2.2. Hacia una definición de creatividad matemática	29
3.1.2.3. Categorías para el análisis de la creatividad matemática	30
3.1.2.4. Procesos creativos y productos creativos	32
3.1.3. Creatividad en la escuela	33
3.1.3.1. Ambientes de aprendizaje que promueven la creatividad	33
3.1.3.2. Tareas matemáticas que posibilitan la creatividad	36
3.1.3.3. Prácticas de enseñanza para el desarrollo de la creatividad matemática	37
3.2. Entornos didácticos	39
3.2.1. Teoría de situaciones didácticas	39
3.2.1.1. Conceptos clave de la teoría de situaciones didácticas	41
3.2.1.2. El contrato didáctico	42
3.2.2. Modelo de análisis de los entornos didácticos	45
3.2.2.1. Dimensiones referidas a la estructura didáctica de la clase	47
3.2.2.2. Dimensiones referidas a la organización social de los estudiantes	50
3.2.2.3. Variabilidad en los problemas matemáticos	51

4. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	54
4.1. Fase cuantitativa	57
4.1.1. Metodología Fase Cuantitativa	57
4.1.1.1. Participantes	58
4.1.1.2. Instrumentos	59
4.1.1.3. Análisis estadísticos	63
4.1.2. Resultados Fase Cuantitativa	67
4.1.2.1. Objetivo 1: Evaluación de la creatividad matemática	67
4.1.2.2. Objetivo 2: Caracterización de los entornos didácticos	72
4.1.2.3. Objetivo 3: Relación entre la creatividad y los entornos didácticos	76
4.2. Fase cualitativa	79
4.2.1. Metodología Fase Cualitativa	79
4.2.1.1. Estudio de casos	80
4.2.1.2. Selección de los casos	80
4.2.1.3. Análisis	82
4.2.2. Resultados Fase Cualitativa	84
4.2.2.1. Presentación de los casos	84
4.2.2.2. Categorías a priori	89
4.2.2.3. Categorías emergentes	104
4.2.2.4. Articulación de las categorías	113
5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	119
5.1. Evaluación de la creatividad matemática	119
5.2. Caracterización de los entornos didácticos	121
5.3. Influencia de los entornos didácticos en la creatividad matemática	124
5.4. Tipos de entornos didácticos y su influencia en la creatividad en el aula	132
5.5. Consideraciones de la investigación	139
5.6. Conclusiones	141
6. BIBLIOGRAFÍA	147
7. ANEXOS	157
Anexo 1: Ítems del test de creatividad matemática final	157
Anexo 2: Ítems que componen el piloto del test	158

Anexo 3: Protocolo de aplicación del test	160
Anexo 4: Rúbrica de puntuación de test de creatividad matemática	162
Anexo 5: Actividad de invención de problemas de los profesores	163
Anexo 6: Manual de codificación de entornos didácticos	165
Anexo 7: Problemas creados por los profesores del estudio de casos	176

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1:	Distribución de los cursos participantes según nivel socioeconómico y perfil de la escuela	58
Tabla 2:	Descripción de variables sobre la variabilidad en la dificultad de las tareas	62
Tabla 3:	Descripción de las variables y del total de perdidos	64
Tabla 4:	Descripción de los modelos multinivel estimados	66
Tabla 5:	Estadísticos descriptivos test de creatividad matemática	67
Tabla 6:	Estadísticos descriptivos dimensiones de creatividad matemática	68
Tabla 7:	Estadísticos descriptivos dimensiones para cada uno de los ítems	69
Tabla 8:	Puntajes del test de creatividad matemática según nivel socioeconómico	70
Tabla 9:	Puntajes test de creatividad matemática según género	70
Tabla 10:	Puntajes test de creatividad matemática para cada curso participante	72
Tabla 11:	Estadísticos descriptivos para cada dimensión de los entornos didácticos	73
Tabla 12:	Tabla de contingencia entre el nivel socioeconómico de la escuela y el entorno didáctico	75
Tabla 13:	Tabla de contingencia entre el perfil de la escuela y el entorno didáctico	76
Tabla 14:	Resultados de los modelos multinivel	78
Tabla 15:	Categorías de análisis	83

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1:	Esquema del diseño metodológico	56
Figura 2:	Medias del puntaje de creatividad matemática según género y NSE	71
Figura 3:	Promedio de cada dimensión en cada grupo	74
Figura 4:	Soluciones elaboradas el curso de Pedro al ítem 1	86
Figura 5:	Soluciones elaboradas el curso de Pedro al ítem 3	86
Figura 6:	Soluciones elaboradas el curso de Aldo al ítem 1	88
Figura 7:	Soluciones elaboradas el curso de Aldo al ítem 3	88

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La creatividad es importante para el desarrollo del pensamiento matemático. Esta idea ha sido propuesta a partir de líneas diversas. Desde filósofos de la matemática (Poincaré, 2000; Whitehead, 1959; Deleuze, 1972) hasta iniciativas modernas como PISA (OCDE, 2012), sostienen que tanto la naturaleza epistemológica de la matemática como su utilidad para comprender el mundo requieren de la permanente creación de ideas nuevas. Esto es necesario tanto en el planteamiento y solución de problemas como en el establecimiento de conexiones entre la matemática y otras disciplinas o aspectos de la vida. Con menor énfasis el currículo chileno ha incorporado estas ideas señalando que la matemática debe ser enseñada como una disciplina creativa y multifacética (MINEDUC, 2012).

Resulta más o menos clara la forma en que disciplinas como el arte, la música o la literatura podrían impulsar el pensamiento creativo en las aulas, sin embargo, en matemática pareciera que esta relación es menos evidente. Diversos investigadores de la educación matemática han desarrollado argumentos que relevan la importancia de la creatividad en actividades escolares, como plantear y resolver problemas de formas novedosas y sin una previa orientación procedimental (Polya, 1973; Lithner, 2008; Pehkonen, 1997).

Dentro de la literatura sobre creatividad, se ha abordado la pregunta sobre si alguien “creativo” lo es de igual forma en todos los campos del saber, es decir, si la creatividad corresponde a un constructo de dominio general, o si es más bien un rasgo específico de cada dominio de conocimiento. Pese a que esta es una pregunta hasta ahora abierta, hay suficientes estudios que muestran que las correlaciones en medidas de creatividad en distintos dominios (escribir un poema; hacer un dibujo, plantear problemas matemáticos) son por lo general muy

bajas o nulas (e.g. Huag et al. 2017; Schoevers, Kroesbergen & Kattou, 2018). Así, sugieren estudiar la creatividad teniendo en cuenta las distintas disciplinas donde esta puede operar. Por lo anterior, este estudio aborda la *creatividad matemática*, es decir, aquella creatividad que tiene en cuenta la especificidad del dominio matemático.

Si bien, en algún momento la creatividad matemática fue considerada bajo una mirada determinista como una cualidad de nacimiento, sinónimo de genialidad o virtuosismo (Silver, 1997), en la actualidad se cuenta con evidencia robusta que sostiene la plasticidad de este atributo psicológico describiéndose múltiples factores que inciden en su desarrollo (Jankowska & Karwowski, 2019; Leikin, 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Sheffield, 2013; 2017). Entre estos factores se han descrito componentes actitudinales y ambientales. Por ejemplo, Singh (2006) mostró que estudiantes provenientes de distintas castas de la India obtenían puntajes en test de creatividad matemática que correlacionaban con sus castas de origen, obteniendo mayores puntajes los estudiantes provenientes de castas con mejores condiciones económicas y sociales. Dai et al. (2012) obtuvieron resultados similares para pruebas de creatividad general, sin embargo, complejizaron la discusión afirmando que las diferencias en creatividad no se deben a factores estáticos como el nivel socioeconómico, sino que involucran componentes dinámicos como el apoyo de la familia, el tipo de estímulo hacia el aprendizaje, la forma en que incorporan o escuchan las ideas de los niños, lo que puede estar influenciado por el nivel educativo de los padres. Por su parte, Jankowska y Karwowski (2019) examinaron la influencia del nivel socioeconómico en la creatividad de preescolares polacos, mostrando que si bien esta explicaba los puntajes iniciales de creatividad (general) no logró explicar los distintos aumentos de creatividad en un test

posterior a la entrada del colegio, sugiriendo examinar la influencia de otros factores ambientales como la escuela.

Sobre los factores asociados a los ambientes escolares, varias investigaciones han mostrado la influencia del aula sobre la creatividad matemática (Kanhai & Singh, 2016; Kwon, Park & Park, 2006; Sarrazy & Novotná, 2013; Tabach & Friedlanyer, 2013). Pero, como sostienen Beguette y Kaufman (2014), “Una cosa es reconocer que el entorno del aula impacta el desarrollo del potencial creativo, y otra muy distinta es comprender lo que se necesita para desarrollar un entorno de aprendizaje que brinde un apoyo óptimo” (p. 53). En este sentido la investigación sobre este tema en los últimos años se ha enfocado principalmente en identificar y desarrollar metodologías de aula que posibilitan el despliegue de ideas creativas.

A la fecha hay un relativo consenso sobre metodologías que favorecen el desarrollo de pensamiento creativo, a saber, actividades de resolución de problemas abiertos o con múltiples soluciones (e.g. Freiman, 2018; Hashimoto, 1997; Kwon et al., 2006; Nohda, 2000; Pehkonen, 1997), trabajo en actividades de modelado (Chamberlin & Moon 2005; Coxbill, Chamberlin & Weatherford, 2013; Wessels 2014), e invención de problemas (Ayllón, Gómez & Ballesta-Claver, 2016; Shuk-kwan, 1997; Silver, 1997; Voica & Singer, 2013). Estos estudios definen herramientas concretas que los profesores pueden introducir a sus clases. Sin embargo, algunos estudios proponen que el hecho de implementar este tipo de trabajo no basta para generar un ambiente de aula favorecedor, por ejemplo, Herkovitz (2009) menciona que un mismo problema abierto puede ser implementado de formas muy distintas, y que las creencias y formas de gestionar el aula de los profesores pueden transformar una buena

estrategia en una clase común, limitando el surgimiento de las ideas de los estudiantes. Se hace pertinente entonces, no solo atender a estrategias o metodologías, sino estudiar el modo en que se gestiona el aula y se implementan distintas metodologías.

Sobre este punto se cuenta con menos investigaciones, sin embargo, algunos estudios de caso y de escalas pequeñas sugieren hallazgos relevantes, por ejemplo, se ha mostrado que la enseñanza de algoritmos con estrategias cerradas no deja espacio a la creatividad en el aula (Shoevers et al. 2019; Pitta-Pantazi, Kattou & Christou, 2018). Además, sobre el papel de las preguntas que realizan los maestros, se ha mostrado que la realización en clases de preguntas abiertas que apunten a la reflexión, sobre todo aquellas que comienzan con “cómo” y “por qué” favorecen el surgimiento de pensamiento creativo (Aziza, 2018; Schoevers et al., 2019). También se ha documentado la relevancia de las discusiones extensas en clases, en grupos pequeños y con el grupo completo para el surgimiento de ideas creativas y para que estas sean tomadas en cuenta (Schoevers, et al., 2019; Hershkowitz, Tabach & Dreyfus, 2017). Entre las limitaciones que reportan los autores de estos estudios está el reducido número de casos considerado y, por tanto, la poca generalidad de los hallazgos. Asimismo, todos estos estudios se han realizado en escuelas de Europa, siendo deseable contar con estudios en aulas pertenecientes a distintos contextos geográficos y sociales.

La presente investigación se enmarca en los estudios orientados a identificar elementos del aula matemática que promueven el desarrollo del potencial creativo de los estudiantes, aportando a las investigaciones recién descritas. Por ende, parte importante de este trabajo radica en la descripción del aula matemática. Atendiendo a la complejidad que este escenario reviste, se decidió emplear un marco para su estudio y descripción que

incorpora una mirada sistémica, donde se consideran las relaciones entre los distintos actores, así como sus posiciones respecto al saber (Brousseau, 2007). Bajo este marco el concepto de *Entornos didácticos* (Sarrazy & Novotná, 2013) permite identificar las dinámicas que ocurren en la clase de matemática entre profesor, alumnos y contenidos.

En específico, el objetivo de este estudio fue comprender la forma en que los entornos didácticos afectan la creatividad matemática de estudiantes chilenos de 5° año básico. Para abordar este objetivo, y superar en parte las limitaciones de los estudios de caso reportados, se optó por un diseño metodológico mixto (Hernández, Fernández & Baptista, 1998), que permite, por un lado, el uso de herramientas cuantitativas para abarcar una muestra mayor en comparación con los estudios en el área y, por otro, emplear herramientas cualitativas para ahondar en la complejidad del objeto. Particularmente se empleó un diseño mixto explicativo en dos fases (Creswell, 2014), donde una primera fase cuantitativa buscó hallar una relación entre distintos tipos de entornos didácticos y la creatividad matemática evaluada en un test, y una segunda etapa que buscó describir cualitativamente el fenómeno en casos específicos seleccionados a partir de la primera etapa.

2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Objetivo general

Comprender la forma en que los entornos didácticos afectan la creatividad matemática de estudiantes chilenos de 5° año básico.

2.2. Objetivos específicos

1. Evaluar la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico.
2. Caracterizar los entornos didácticos en los que se desenvuelven los estudiantes.
3. Determinar la relación entre los entornos didácticos y la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico.
4. Describir la forma en que los entornos didácticos influyen en la creatividad matemática de los estudiantes en el aula.

3. MARCO TEORICO

Con la finalidad de precisar las nociones centrales a esta tesis, este capítulo desarrolla dos conceptos: *creatividad matemática* y *entornos didácticos*. El concepto de *creatividad matemática* se desarrolla a través de tres apartados: Creatividad, donde se aborda la investigación en torno a la creatividad general, se da cuenta del desarrollo de la investigación en este campo, la complejidad de su conceptualización y algunos elementos relevantes en su estudio. El segundo apartado, Creatividad matemática, enmarca el estudio de la creatividad al dominio específico de la matemática desarrollando los argumentos para esta delimitación, así como algunos de los hallazgos en este campo. Finalmente, el apartado Creatividad en la escuela, presenta los argumentos para el desarrollo de investigaciones en el campo educativo, así como resultados relevantes que son considerados en esta investigación.

La segunda parte del capítulo aborda el concepto de *entornos didácticos* (Sarrazy & Novotná, 2013). Este concepto posiciona el estudio del aula matemática desde la tradición francófona de didáctica, en particular, desde la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986). Se incorporan dos apartados, el primero presenta todos los elementos relevantes de la teoría de situaciones didácticas, conceptos claves, la noción de aprendizaje y el concepto de *contrato didáctico*, que resulta central para comprender las dinámicas del aula. El segundo apartado presenta el *modelo de análisis de los entornos didácticos*, una operacionalización de los conceptos de la teoría de situaciones didácticas para el análisis del contrato didáctico en el aula en contextos naturales, sin intervención del investigador.

3.1. Creatividad matemática

El concepto de creatividad matemática no tiene una definición ampliamente aceptada. Para comprender la dificultad que encierra su delimitación es necesario abordar más ampliamente el concepto de creatividad, para posteriormente informar sobre el desarrollo de investigaciones sobre creatividad en el dominio específico de la matemática. Los apartados que siguen tienen por objeto abordar los conceptos desde aspectos generales hasta acercarse al objeto de la tesis, desarrollo de la creatividad matemática en entornos escolares.

3.1.1. Creatividad

3.1.1.1. Definiciones de creatividad

Si revisamos la literatura sobre creatividad puede evidenciarse que no existe una definición ampliamente aceptada (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Mann, 2006; Sriraman, 2009, Haylock, 1987). Esto responde en parte a que el desarrollo de la investigación sobre este tema ha sido abordado desde distintas corrientes teóricas y disciplinares. Pese a que no hay un acuerdo general, la mayoría de las definiciones tienen énfasis comunes que refieren a la creación de lo “nuevo”. Al ordenar las distintas conceptualizaciones se constata que algunas se centran en la creatividad como un estilo de pensamiento que posibilita generar trabajos creativos, otras en los procesos creativos describiendo las etapas que son necesarias para generar nuevas ideas, mientras que otras definiciones consideran la creación final o el producto y sus características (Nadjafikhah et al., 2013; Sriraman y Lee, 2011).

Actualmente, varios autores consideran las conceptualizaciones provenientes de las corrientes psicométricas, planteadas por Guilford y Torrance. Guilford (1967) consideró la

creatividad como un proceso mental dinámico, que incluye pensamiento divergente y convergente. El pensamiento convergente consiste en discriminar si una solución es correcta para una tarea o problema en consideración, mientras que el pensamiento divergente captura múltiples soluciones a un problema o considera el problema desde diferentes perspectivas. Torrance (1974), definió cuatro componentes para el pensamiento divergente: fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración. La fluidez se basa en múltiples ideas para el problema, en otras palabras, la capacidad de generar una gran cantidad de ideas para resolver el problema en cuestión. La flexibilidad está relacionada con la capacidad que le permite a uno pensar en el problema desde diferentes aspectos y generar una variedad de ideas. La novedad se refiere a la generación de soluciones novedosas y "inesperadas". La elaboración está asociada con la capacidad de describir, ampliar y desarrollar una idea y centrarse en los detalles. Puede observarse que varios trabajos y test equiparan creatividad a pensamiento divergente, dejando fuera el primer componente de Guilford (Esquivias, 2004).

Según Nadjafikhah et al., (2013) muchas definiciones se centran en el producto final de la actividad creativa definiendo lo que es considerado como un producto creativo. Los dos criterios principales para un producto creativo son la originalidad (distinta del resto, novedosa, etc.) y la utilidad (que sea valiosa, considerada por el grupo, etc.). Por ejemplo, Sternberg (2001) menciona que la creatividad está relacionada con el potencial de una persona para generar ideas novedosas de alta calidad. También Sternberg y Lubart (2000) afirman que la creatividad es la capacidad de producir trabajos inesperados y útiles. Sternberg et al. (2005) también definen la creatividad como la capacidad de producir un trabajo

novedoso, original, inesperado y apropiado que sea de alta calidad o cumpla con las limitaciones de la tarea.

Ampliando la concepción de la creatividad como un fenómeno exclusivamente psicológico, algunos autores relevan el rol del medio social, entendiendo la creatividad como el resultante entre un sujeto y un medio que permite, facilita y acoge las producciones creativas (Pascale, 2005). En general, los estudios que se inscriben en una concepción social de la creatividad toman como referente el modelo de sistemas de Csikszentmihalyi (1998; 2000). Este autor propone que entender la creatividad exclusivamente como un proceso mental no es suficiente para explicarla, puesto que la creatividad corresponde a un fenómeno que es tanto social y cultural, como psicológico y personal. Es decir, la creatividad no se produce solo dentro de la cabeza de las personas, sino en la interacción entre el pensamiento de una persona y un contexto sociocultural. En específico, la creatividad es el resultado de la interacción de un sistema compuesto por tres elementos: una cultura constituida entre otras cosas por reglas simbólicas, un sujeto que aporta algo nuevo a ese campo simbólico, y un ámbito, formado por expertos que pueden reconocer y validar lo nuevo. Estos tres subsistemas: cultura, sujeto y ámbito, son necesarios para que una idea creativa pueda surgir.

De las definiciones actuales, la presente investigación considera los aportes de Guilford y Torrance, incorporando el pensamiento divergente y convergente como componentes de la creatividad. El pensamiento convergente se relaciona con los aportes de Sternberg et al. (2005) quienes señalan la importancia de considerar las limitaciones de la tarea. Este elemento es crucial para considerar definiciones que puedan incluir el dominio matemático. Finalmente, los aportes de Csikszentmihalyi (2000) relevan uno de los puntos

centrales de esta investigación, la importancia del medio social, en nuestro caso el aula, para el surgimiento y la incorporación de ideas creativas.

3.1.1.2. Los distintos niveles de la creatividad.

Una de las complejidades que involucra la definición del concepto de creatividad es que esta debe ser lo suficientemente amplia para abarcar tanto situaciones más cotidianas, por ejemplo, la elaboración de estrategias para resolver un problema, como grandes obras que modifican una disciplina. Para precisar la naturaleza de las producciones algunos autores han caracterizado *niveles* de creatividad, que distinguen tanto el ámbito de los sujetos como el impacto de las producciones. La distinción más clásica diferencia entre big-c y little-c (Csikszentmihalyi, 1998; Stein, 1953; Kauffman & Beghetto, 2009).

El nivel big-c involucra ámbitos profesionales, con sujetos que han adquirido un gran dominio de sus campos de estudio. Se trata de producciones que se traducen en un aporte considerable a las disciplinas. Gran parte de las investigaciones sobre creatividad han tenido por objeto el estudio de la vida de personas creativas, en el sentido de la big-c, el estudio de sus procesos mentales o de sus características personales (e.g. Simonton, 2004).

El nivel little-c involucra ámbitos no expertos y refiere a la construcción de ideas que son consideradas como nuevas, originales o valiosas por los pares, por ejemplo, la elaboración de una nueva estrategia de resolución para un problema o una relación entre cuestiones aparentemente muy distantes. Sobre este punto, Sternberg (2004) sostiene que los procesos mentales implicados en ambas resultan muy similares y las diferencias responden más a cuestiones contextuales que cognitivas.

A esta distinción Kauffman y Beghetto (2009) agregan el nivel mini-c, que se diferencia de las anteriores en cuanto al papel del juicio externo. La mini-c abarca las percepciones e interpretaciones novedosas y personalmente significativas involucradas en el aprendizaje y la experiencia, por ejemplo, una nueva conexión entre lo que se ha aprendido en la clase de ciencias e historia o una nueva comprensión de cómo resolver un problema matemático, independiente de si esa interpretación es o no novedosa para el resto. Es decir, la mini-c depende del juicio personal subjetivo que define la creación como nueva o útil. Kauffman y Beghetto (2009) sostienen que este nivel de creatividad está vinculado al aprendizaje, recogiendo las ideas de autores como Guilford (1950, citado en Kauffman & Beghetto, 2009). En este sentido, la creatividad mini-c puede servir como génesis para los otros niveles de creatividad.

3.1.1.3. Generalidad o especificidad del dominio

Una discusión al centro del estudio de la creatividad consiste en la cuestión sobre la generalidad del dominio, en otras palabras, si las habilidades que subyacen a la creatividad resultan equivalentes para cualquier dominio o área de conocimiento o si son específicas para cada área (Kaufman et. al, 2010). Si la creatividad es de dominio general, es de esperar que diferentes medidas de creatividad en áreas específicas estuvieran altamente correlacionadas entre sí (Ivcevic, 2007). Sin embargo, distintas investigaciones han realizado mediciones de creatividad evaluando tareas pertenecientes a distintos ámbitos, por ejemplo, escribir poemas, resolver o inventar problemas matemáticos, realizar dibujos, entre otras. Se han obtenido, por lo general, correlaciones bajas o nulas entre las distintas medidas (e.g. Baer,

1996; Barbot et al., 2016; Huang et al., 2017; Singer, 2018; Kattou et al. 2015; Schoevers et al., 2018).

Las explicaciones a este fenómeno son diversas. Según Puckler (2004), la creatividad es predominantemente una habilidad de dominio general, pero parece ser específica del dominio cuando se aplica a tareas concretas. Según el autor, varios componentes de creatividad son de dominio general, sin embargo, la necesidad de que las personas se especialicen en distintas disciplinas da la apariencia de dominio de la especificidad. Para Puckler, entonces, los dominios específicos son casos particulares donde estudiar la creatividad.

Sternberg (2004), en una postura más conciliadora, sostiene que, para cualquier conjunto de procesos mentales, incluyendo la creatividad y otros fenómenos psicológicos, es válida la pregunta de si las representaciones del fenómeno aplican para el dominio general o solo para un dominio específico. Según el autor, la mayoría de las representaciones de fenómenos psicológicos no son ni completamente específicas de un dominio ni de dominio general, por lo que la construcción de una dicotomía excluyente entre la generalidad y la especificidad del dominio es innecesaria.

En efecto, al mirar la evolución de las teorías sobre creatividad vemos una transferencia constante entre los marcos conceptuales que surgen en el campo de la creatividad general y la creatividad específica (Leikin, 2009). A modo de ejemplo podemos nombrar las categorías de Torrance sobre creatividad general, que han sido consideradas en la mayoría de los trabajos sobre creatividad matemática (Sheffield, 2013), así mismo, las

etapas del proceso creativo identificadas por Hadamard (1945) en el campo de la matemática han sido consideradas y transformadas para el campo de la creatividad general.

En síntesis, sin dar por zanjada la cuestión sobre la especificidad o generalidad del dominio, a la luz de las investigaciones mencionadas, este estudio se acota a la creatividad en el ámbito matemático. Por esta razón se emplea el término *creatividad matemática*, el que será profundizado en los apartados que siguen.

3.1.2. Creatividad matemática

La producción académica en torno a la creatividad en el dominio específico de la matemática ha ido en un aumento considerable en las últimas décadas (Schoevers, 2019). En este apartado se desarrollará la importancia de la creatividad para el pensamiento matemático, así como una descripción de los principales hallazgos y conceptualizaciones en este campo.

3.1.2.1. Importancia del pensamiento creativo para el desarrollo matemático

Como sugiere Mann (2006), es esperable que muchas personas consideren que la relación entre matemática y creatividad es escasa, pues sus experiencias escolares los llevan a identificar la matemática con la mecanización y reproducción de fórmulas, algoritmos y símbolos, que dejan poco espacio a las construcciones y motivaciones personales. Contrariamente, los matemáticos por lo general consideran que la creatividad es altamente valiosa en su campo, y está presente en la formulación de nuevos problemas y en su resolución, actividades que son centrales en su quehacer (Dreyfus & Eisenberg, 1996; Ginsburg, 1996; Mann, 2006).

Al parecer la relación entre creatividad y matemática, más evidente en ámbitos profesionales, parece menos clara en el nivel escolar. Para comprender esta relación es

necesario revisar los aportes de algunos teóricos. Por ejemplo, Polya (1973) define el conocimiento matemático como una mezcla entre el manejo de información y el “saber hacer”, donde este último es el componente más importante. El autor define el saber hacer como la capacidad de resolver problemas, lo que requiere independencia, juicio, originalidad y creatividad. Por tanto, para desarrollar las capacidades matemáticas de los estudiantes se requiere que estos tengan la oportunidad de usar su juicio y creatividad para resolver problemas desafiantes.

Desde otro enfoque, Lithner (2008) llega a una conceptualización similar. La autora clasifica el pensamiento matemático escolar en dos tipos: pensamiento imitativo y pensamiento creativo. Ambos resultan necesarios en el aprendizaje, no obstante, la ocurrencia del primero es mucho más común en la escuela. El pensamiento imitativo puede ser memorístico, consistente en recordar una respuesta y anotar, o algorítmico, que consiste en recordar un procedimiento o algoritmo y ejecutarlo. Por el contrario, el pensamiento creativo involucra crear una nueva idea o una nueva secuencia de razonamiento (nueva para el sujeto), y utilizarla para llegar a una respuesta. Para la autora, en el pensamiento matemático creativo, el valor epistémico radica en una base lógica matemática. Contrario a lo que ocurre con el pensamiento imitativo, donde el valor de verdad radica en la autoridad de la fuente, es decir, el profesor.

Por su parte, Pehkonen (1997) señala que desarrollar la creatividad favorece la comprensión matemática, puesto que permite integrar tópicos matemáticos con elementos intra y extra matemáticos, dotándolos de sentido. Es decir, la creatividad favorece establecer relaciones entre un concepto matemático y otras ideas dentro y fuera del mundo de las

matemáticas. Este aspecto se conecta con la definición que Kauffman y Beghetto (2009) dan para la creatividad mini-c, referida a las nuevas interpretaciones que resultan personalmente significativas, y que contribuyen a dar sentido a la experiencia. Toda vez que un estudiante dota de sentido un concepto o idea matemática, porque le resulta significativo para explicar otras ideas, se está en presencia de una forma de creatividad conectada con la comprensión y el aprendizaje.

En definitiva, matemática y creatividad están, o debieran estar, estrechamente conectadas en todos los niveles, sobre todo en los niveles escolares. Pensar la relación entre creatividad y matemática como limitada al trabajo en temas visuales o artísticos (por ejemplo, proporciones con el número áureo) representa una visión muy limitada del fenómeno. Esta relación es más amplia y abarca la resolución y planteamiento de problemas, las conexiones entre tópicos matemáticos y otros elementos de las matemáticas o de la vida cotidiana, el establecimiento de implicancias y cadenas lógicas, y en general el planteamiento de ideas y preguntas sobre aspectos matemáticos.

3.1.2.2. Hacia una definición de creatividad matemática

Los matemáticos Liljedahl y Sriraman (2006) analizan y reflexionan acerca de las distintas aproximaciones conceptuales de *creatividad* y *creatividad matemática* con el objeto de construir una definición que logre condensar los principales aportes de las investigaciones en el tema hasta el 2006. Considerando la distinción entre los niveles big-c y little-c, la creatividad a nivel profesional, o big-c, es definida por los autores como:

“la capacidad de producir trabajos originales que extienden significativamente el conjunto de conocimientos (que también podría incluir síntesis significativas y

extensiones de ideas conocidas) o que abre nuevas preguntas a otros matemáticos” (Liljedahl & Sriraman, 2006, p. 18).

La manifestación de este tipo de creatividad en el nivel escolar no sería imposible según los autores, pero sí difícil de encontrar. Por otro lado, la creatividad matemática en el nivel escolar, o *little-c*, es concebida como:

“el proceso que da como resultado soluciones inusuales (nuevas) y/o perspicaces a un problema dado, y/o la formulación de nuevas preguntas y/o posibilidades que permiten considerar un viejo problema desde un nuevo ángulo” (Liljedahl & Sriraman, 2006, p. 19).

Esta última definición resultará central en este trabajo debido a que sintetiza varias de las disyuntivas. En primer lugar, se centra tanto en el *proceso* como en el *producto* creativo, reconociendo la importancia de ambos momentos en su conformación. Asimismo, resulta amplia en aquello que concibe como “nuevo” sin acotar que sea nuevo para el sujeto o para su entorno. Igualmente, esta definición es lo suficientemente flexible para permitir centrar el análisis del surgimiento de la creatividad en el sujeto que experimenta los procesos creativos, como en el ambiente que posibilita, recoge y emplea los productos creativos generados.

3.1.2.3. Categorías para el análisis de la Creatividad Matemática

De acuerdo con Leikin (2009), una corriente de enfoque pragmático en el estudio de la creatividad orientó la investigación hacia la búsqueda de herramientas psicométricas para su evaluación. En este contexto, se desarrollaron una serie de instrumentos de evaluación, de

los que destacan los test de Guilford (1967) y de Torrance (1974). Este último diseñó una prueba que consta de una serie de tareas que pueden evaluarse a partir de 4 categorías:

1. Fluidez: número total de respuestas apropiadas.
2. Flexibilidad: el número de diferentes categorías de respuestas.
3. Originalidad: rareza de las respuestas.
4. Elaboración: cantidad de detalles utilizados en las respuestas.

Las tres primeras categorías definidas por Torrance (1974) han sido consideradas en distintos test diseñados para evaluar creatividad matemática (Singh, 1987; Kwon et al., 2013; Tabach & Friedlanyer, 2013; Lee & Seo, 2003). Varios estudios emplean estos test evaluando el nivel de creatividad matemática de los participantes en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad del razonamiento matemático asociado con la resolución de problemas (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013; Lev-Zamir & Leikin, 2013; Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013; Voica & Singer, 2013).

En la evaluación de la creatividad matemática, se examinan y categorizan las respuestas elaboradas por los sujetos a ítems de problemas abiertos, es decir, cuya solución es un conjunto de muchas o infinitas respuestas correctas y donde existen varias estrategias distintas de resolución (Leikin, 2009; Pehkonen, 1997). El conjunto de respuestas es evaluado en cuanto a ‘fluidez’ (número total de respuestas), ‘flexibilidad’ (estrategias distintas adoptadas para generar respuestas) y ‘originalidad’ (lo distinto de una respuesta de lo que responde la mayoría). Para evaluar tales categorías se efectúan rúbricas que permiten catalogar el conjunto de respuestas asignando puntajes en cada una de ellas.

3.1.2.4. Procesos creativos y productos creativos

La creatividad matemática ha sido estudiada enfatizando su carácter de proceso mental o de producto final. Mientras algunas investigaciones han estudiado el proceso creativo, es decir, la actividad cognitiva que desarrolla un sujeto en el momento de crear la solución a un problema; otras investigaciones se han centrado en estudiar productos creativos, es decir, las características de las producciones creativas de los sujetos. Si bien, procesos y productos están intrínsecamente relacionados, ya que los productos creativos devienen de procesos creativos, hay diferencias en el foco y en las aproximaciones metodológicas empleadas en su análisis (Leikin & Pitta-Pantazzi, 2013; Sheffield, 2013).

Los productos creativos en matemática han sido examinados en distintas investigaciones a partir del uso de las categorizaciones de Torrance (1974) sobre creatividad general antes descritas. Los análisis que se realizan suelen categorizar las producciones de los sujetos.

En cuanto al proceso creativo, varios estudios han investigado la forma en que se producen piezas creativas en la resolución de problemas matemáticos. Eryvynck (1991) describe la creatividad matemática a través de tres fases: una primera técnica conceptual, una fase algorítmica y la toma de decisiones con estrategias no algorítmicas. Por otro lado, Hadamard (1945) indagó en los procesos mentales que matemáticos y científicos seguían cuando hacían matemáticas y describió el proceso creativo a partir del modelo *Gestalt* con sus cuatro fases: preparación, incubación, iluminación y verificación. Trabajos recientes como el de Liljedahl (2013) siguen la línea trazada por el trabajo de Hadamard (1945), enfatizando el estudio de momentos de *insight*, clave en la fase de ‘iluminación’.

A pesar de la descripción más a menos aceptada de las fases del proceso creativo en matemáticas, queda aún por comprender cómo promover mecanismos adecuados para que la vivencia y transición de estas distintas etapas pueda ocurrir. (Guzmán, 1995).

3.1.3. Creatividad en la escuela

La creatividad es un rasgo plástico que puede desarrollarse en mayor o menor medida a partir de las experiencias de los sujetos (Jankowska & Karwowski, 2019; Leikin, 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Sheffield, 2013; 2017). Las características de los ambientes educativos, tanto familiares como institucionales, influyen en su desarrollo. Pese a lo anterior, la investigación sobre los ambientes escolares que favorecen la creatividad es aun escasa. En este apartado se muestran los resultados de investigaciones que describen ambientes de aprendizaje propicios para el desarrollo de la creatividad general y, remitiéndonos a creatividad matemática, se analizan tipos de tareas y prácticas de enseñanza reportadas por la literatura como adecuadas para su desarrollo.

3.1.3.1. Ambientes de aprendizaje que promueven la creatividad

Los ambientes de aprendizaje corresponden tanto a características físicas como psicosociales y pedagógicas presentes en el espacio donde se llevan a cabo los procesos de aprendizaje (Davies et al., 2012). La revisión sistemática de Davies et al. (2012) investigó los estudios realizados en los últimos años (2011 en adelante) identificando factores presentes en los ambientes de aprendizaje que favorecen el desarrollo de la creatividad. Las conclusiones a las que arriban identifican elementos del entorno físico, características pedagógicas y psicosociales y asociaciones con elementos externos al aula.

Con respecto al entorno físico, informan que el uso flexible de espacios, materiales y tiempos puede promover la creatividad de los estudiantes. Específicamente, señalan la importancia de dar tiempo a actividades extracurriculares y proporcionar áreas abiertas y espaciosas en la sala y el exterior que los estudiantes puedan usar de forma libre e imaginativa. Esto incluye poner a disposición una amplia gama de recursos, materiales y herramientas en el entorno de aprendizaje, desde materiales que son maleables hasta recursos tecnológicos. Por otro lado, señalan que establecer asociaciones con organizaciones y expertos puede fomentar la creatividad. Por ejemplo, visitas a espacios como museos y galerías de arte, o traer expertos al aula de diversas organizaciones.

Con respecto a lo que Davies et al. (2012) denominan “características pedagógicas y psicosociales” señalan que el uso de tareas novedosas, emocionantes y con contextos reales puede estimular la creatividad de los estudiantes. Recomiendan permitir que los estudiantes tengan opinión y control sobre su aprendizaje, logrando un equilibrio entre proporcionar estructura y libertad para que los estudiantes se sientan apoyados y alentados a asumir los riesgos necesarios para la expresión creativa. Esto también incluye adoptar un enfoque de aprendizaje más lúdico, minimizando la presión y permitiendo una experiencia de aprendizaje estructurada pero flexible.

En otra revisión de la literatura Beghetto & Kaufman (2014) se centran en artículos que especifican aquello que los profesores pueden realizar en clases para establecer un ambiente de aprendizaje que apoye la creatividad. Los autores identifican los siguientes aspectos:

- Realizar actividades en clases que requieran que los estudiantes generen múltiples ideas, o que los impulse a redefinir problemas, usar analogías y evaluar las ideas que generan.
- Aumentar el interés del estudiante dando cierto nivel de elección en las actividades de aprendizaje, por ejemplo, elegir sus propias formas de resolver problemas.
- Promover la motivación intrínseca de los estudiantes enfocándolos en los aspectos propios de la tarea (por ejemplo, su valor, por qué es interesante) en lugar de las características extrínsecas (por ejemplo, competir por la nota o para evitar castigos).
- Utilizar el aprendizaje académico para resolver problemas de la comunidad o situaciones realistas, mediante proyectos, identificando una necesidad y trabajando en colaboración entre pares y con expertos.
- Finalmente, los administradores escolares desempeñan un papel clave en el establecimiento de un entorno escolar que apoye la creatividad, proporcionando suficiente estructura y flexibilidad curricular.

Lo descrito hasta acá muestra elementos relevantes a ser considerados de forma general, sin embargo, el cómo la especificidad de las distintas disciplinas influye en la forma en que puede realizarse cada una de estas actividades es una cuestión no menor, más aun si se considera la discusión sobre la especificidad del dominio en los distintos campos disciplinares, en efecto, asignaturas como artes, lenguaje o matemática podrían incorporar los aspectos identificados en estas investigaciones de formas muy distintas y fuertemente ancladas en los modos de construir conocimiento propias de esas disciplinas. En el siguiente

apartado se describen investigaciones que incorporan la matemática en el desarrollo de la creatividad en el aula.

3.1.3.2. Tareas matemáticas que posibilitan la creatividad

Una de las principales líneas de investigación en el estudio de la creatividad matemática ha consistido en explorar qué tipo de tareas podrían posibilitar procesos creativos. Entre los investigadores en educación matemática parece haber cierto consenso en cuanto a que la enseñanza orientada a la investigación, el aprendizaje exploratorio y, en general, los entornos de resolución de problemas favorecen y aumentan la creatividad (Pitta-Pantazi, Kattou & Christou, 2018). En este marco los tipos de tareas que favorecen la creatividad son la resolución de problemas abiertos, la invención de problemas y las actividades de modelado.

La resolución de problemas abiertos consiste en el trabajo en problemas que tienen muchas soluciones, distintas formas de resolución o distintas formas de ser interpretados y extendidos. Algunas investigaciones muestran cómo estos problemas permiten la generación de múltiples ideas, flexibilidad de pensamiento y posibilitan soluciones originales (Pehkonen, 1997; Nohda, 2000, Freiman, 2018). Como se anticipó, este tipo de problemas es usado para la evaluación de la creatividad matemática mediante test psicométricos que definen distintos niveles de complejidad y sofisticación de las soluciones (e.g. Sighn, 1987; Lee & Seo, 2003; Tabach & Fiedlander, 2013; Leikin, 2009). Una investigación de Kwon et al. (2006) mostró que el trabajo en resolución de problemas abiertos mejoró los puntajes de creatividad matemática del grupo que participó de la intervención, en contraste con el grupo de control que no recibió ninguna intervención. Por su parte, Freiman (2018) mostró que

incluso niños preescolares (4-5 años) podían hallar múltiples soluciones a problemas de aritmética identificando distintos niveles de abstracción en el desarrollo.

El segundo tipo de tarea corresponde a la “invención de problemas”. Esta consiste en que los estudiantes propongan, diseñen e inventen problemas matemáticos a partir de algunas premisas, por ejemplo, “crea un problema que se resuelva dividiendo fracciones”. Este tipo de actividades permite a los estudiantes explorar las aplicaciones de aquello de aprenden, evaluar las condiciones de los problemas que crean y tomar decisiones en el aula (Ayllón, Gómez & Ballesta-Claver, 2016; Shuk-kwan, 1997; Silver, 1997; Voica & Singer, 2013).

Finalmente, las actividades de modelado consisten en la aplicación y creación de modelos matemáticos para la resolución de problemas que provienen de contextos de la vida real. Requieren en su desarrollo de la capacidad de seleccionar las variables del contexto que inciden en el fenómeno para matematizarlas, resolver el problema dentro del modelo matemático y posteriormente evaluar y trasladar dichas soluciones al ámbito real. Este tipo de actividades fomenta la creatividad al posibilitar la toma de decisiones y la intersección de disciplinas y campos de estudio (Chamberlin & Moon 2005; Coxbill et al.2013; Wessels 2014).

3.1.3.3. Prácticas de enseñanza para el desarrollo de la creatividad matemática

Pese a que identificar tipos de tareas para implementar en el aula resulta crucial para promover la creatividad matemática, por sí solo no es suficiente para generar un ambiente favorecedor. Herkovitz (2009) mostró que un mismo problema abierto puede ser implementado de formas muy distintas, ya que las creencias y formas de gestionar el aula de los profesores pueden transformar una buena estrategia en una clase común, limitando el

surgimiento de las ideas de los estudiantes. Por lo tanto, es necesario ahondar en el rol que los profesores tienen en el aula para la gestión de distintas actividades. Sobre este punto las investigaciones son escasas y se cuenta mayormente con estudios de casos.

Por ejemplo, se ha mostrado que la enseñanza de algoritmos con estrategias cerradas no deja espacio a la creatividad en el aula, es decir, la estructura clásica exposición-ejemplo-ejercicios deja poco espacio al surgimiento de producciones creativas (Shoevers et al. 2019; Pitta, Pantazi et al., 2018; Mann, 2009).

Por otro lado, sobre el papel de las preguntas que realizan los maestros se ha mostrado que la realización en clases de preguntas abiertas que apunten a la reflexión, sobre todo aquellas que comienzan con “cómo” y “por qué”, favorecen el surgimiento de pensamiento creativo (Aziza, 2018; Schoevers et al., 2019). Además, las preguntas deben ser acompañadas de tiempos extensos de discusión posterior, en grupos pequeños y con el grupo completo, esto posibilita el surgimiento de ideas creativas y permite que estas sean tomadas en cuenta e incorporadas a la discusión (Schoevers et al., 2019; Hershkowitz, Tabach & Dreyfus, 2017).

3.2. Entornos Didácticos

El concepto de *entornos didácticos*, acuñado por los didactas franceses Sarrazy y Novotná, (2013) presenta un modelo de análisis del aula matemática, que emplea los conceptos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986). Resulta necesario, por tanto, presentar la teoría de base de la cual se desprenden los conceptos que guían esta tesis. Así, en el primer apartado se desarrollan los elementos relevantes de la teoría de situaciones didácticas, conceptos claves, la noción de aprendizaje y el concepto de *contrato didáctico*. Luego, en el segundo apartado, se presenta el *modelo de análisis de los entornos didácticos*, modelo desde el cual se describe y analiza el aula en esta investigación.

3.2.1. Teoría de situaciones didácticas

La teoría de situaciones didácticas, ideada por Guy Brousseau en la década de los 70, propuso un modelo de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos desarrollado con la finalidad de crear intervenciones didácticas. Esta teoría representa un distanciamiento considerable de los métodos tradicionales de la época. La reforma de las matemáticas modernas¹ generó un contexto particular para su aparición. En este periodo se proponía la enseñanza de contenidos matemáticos mediante el estudio de textos formales escritos en un lenguaje simbólico abstracto. Los textos presentaban los resultados finales obtenidos por los matemáticos, escondiendo el proceso y las preguntas que eran parte de su génesis (Brousseau y Warfield, 2014). De este modo, Brousseau se propuso establecer

¹ La reforma de las matemáticas modernas fue un cambio curricular dramático adoptado en Estados Unidos y algunos países europeos durante la década de 1960. La característica principal de esta reforma fue la incorporación de teoría de conjuntos y de elementos de álgebra abstracta en las clases escolares, con énfasis en la enseñanza de demostraciones, en el rigor y el correcto uso del lenguaje simbólico de la matemática.

condiciones o situaciones que pudieran inducir en los estudiantes la génesis de los conceptos matemáticos mediante procesos comparables a los vividos por los matemáticos antes de la presentación final de sus resultados, es decir, en el proceso de desarrollo matemático. Esta idea encontró justificación en algunas teorías emergentes del periodo referidas al aprendizaje.

Distintos psicólogos cognitivos de la época habían establecido la tendencia natural de los sujetos a adaptarse al medio en que estos se desenvuelven. Según Brousseau (1986, 2007) las teorías cognitivas de la época mostraban evidencia contundente al respecto: Skinner mostraba la modificación de las conductas del sujeto por medio de los estímulos del medio, Piaget evidenciaba la adaptación del sujeto a un medio a través de desequilibrios y adaptaciones, Vygotsky mostraba la importancia del medio sociocultural en el desarrollo del lenguaje. En todas estas teorías podían distinguirse dos procesos: uno de enculturación y otro de adaptación independiente. En este marco se orientaron los análisis hacia los dispositivos experimentales en sí mismos y la relación que guardaban con las nociones matemáticas resultantes, para establecer en qué condiciones podía propiciarse que un sujeto tenga la necesidad de un conocimiento matemático determinado para tomar ciertas decisiones (Brousseau, 2007).

Brousseau toma los resultados de las investigaciones producidas por Piaget, que mostraba que los sujetos eran capaces, mediante determinados dispositivos, de construir conocimientos que no les habían sido enseñados previamente: “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta a través de respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (Brousseau,

2007, p. 30). Sin embargo, según el autor, pensar que el aprendizaje se diera de un modo “naturalista”, con la sola inmersión de los sujetos en un medio, era insuficiente. Para que tal producción de conocimientos tuviera lugar, debían construirse intencionadamente una situación didáctica, para la cual los conocimientos eran la respuesta esperada. A partir de estas premisas, la teoría de situaciones didácticas responde a la creación y estudio de los dispositivos necesarios intencionados para que los sujetos construyan por sí mismos distintas nociones matemáticas. Brousseau define *situación didáctica* como: “Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución” (Brousseau, 1986).

3.2.1.1. Conceptos clave de la Teoría de Situaciones Didácticas

Para que las situaciones antes descritas culminen en experiencias de aprendizaje y aseguren la transmisión de los conocimientos culturales que se desea adquieran los estudiantes, se requiere atravesar por dos momentos o fases, que llevarán progresivamente a la construcción de los conocimientos deseados. La primera fase es denominada como *a-didáctica*, y la segunda fase se conoce como *institucionalización* (Brousseau, 2007).

En la situación a-didáctica el estudiante se enfrenta al problema sin intervención del maestro, una vez que lo ha aceptado y muestra interés en resolverlo. Los conocimientos necesarios para resolver el problema deben controlarse de manera que sea posible que surja de esta fase el nuevo conocimiento al que se apunta. La situación a-didáctica debe permitir al niño juzgar el resultado de sus acciones y volver a intentar si el resultado ha sido distinto

al esperado, esta característica de la situación a-didáctica es conocida como retroacción, la que no es dada por el profesor sino por la naturaleza del problema que ha sido ideado para que el niño identifique si ha fallado al no cumplir con lo requerido. El rol del profesor en esta fase es *devolver* al niño la responsabilidad del saber, no dando respuestas, sino que motivando al niño a relacionarse con el medio.

Finalmente, la institucionalización responde a un hito social donde el maestro conecta el aprendizaje surgido de la situación a-didáctica y lo incorpora a una producción científica o cultural, le da status a esas producciones libres y las valida como conocimiento que debe ser aprendido (Brousseau, 2007).

3.2.1.2. El contrato didáctico

El concepto de contrato didáctico resulta central en la teoría de situaciones didácticas. Pese a que Brousseau, desde un punto de vista cognitivo, adscribe a los planteamientos de Piaget, al situar los procesos cognitivos de los sujetos en el contexto escolar, incorpora nociones de otras vertientes teóricas. Estas quedan en gran parte expresadas por la noción de contrato didáctico.

Al estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de la implementación de situaciones didácticas, los investigadores percibieron rápidamente que los comportamientos de los alumnos no respondían únicamente a procesos cognitivos, sino que estaban atravesados por elementos característicos del contexto escolar, en particular, por la asimetría en que se encuentran profesor y alumnos respecto al conocimiento, lo que delimitaba una especie de contrato no declarado. Según Brousseau el contrato es “una interpretación de los compromisos, las expectativas, las creencias, los medios, los resultados y las penalizaciones

previstas por uno de los protagonistas de una situación didáctica (estudiante, docente, padres, sociedad) para sí y para cada uno de los otros, a propósito del conocimiento matemático que se enseña” (Brousseau, Sarrazy & Novotná, 2014, p. 153).

Según la noción de contrato didáctico, los miembros de la situación educativa actúan como en un “juego de roles”, asumiendo reglas específicas que regulan sus acciones y que son, en su mayoría, nunca verbalizadas de manera directa. El conjunto de reglas (relativas a lo matemático) que rigen “el juego” entre un profesor y su grupo de estudiantes se conforma a partir de la repetición progresiva de las experiencias que tienen lugar en el aula en relación con el conocimiento, instalándose progresivamente. Es decir, los estudiantes no aprenden sólo lo que el profesor les enseña, ni lo que logran construir a partir de sus conocimientos o a partir de preguntas que los desafían a expandir tales conocimientos, sino que, además de eso, aprenden una serie de reglas relativas al conocimiento basadas en su experiencia como estudiantes. Estas reglas capturan lo que suponen los estudiantes que el profesor espera de ellos, y son combinadas con el conocimiento disciplinar conformando un saber que es útil y eficiente en el salón de clases, aunque a veces erróneo. (Sarrazy & Novotná, 2005; Brousseau, 2007).

Para aterrizar la noción de contrato didáctico conviene examinar uno de los casos a la génesis de la formulación de este concepto. La edad del capitán trata de uno de los experimentos diseñados por el IREM de Grenoble, donde se aplicó a estudiantes de 5° grado el siguiente problema: “en un barco hay 26 cabras y 10 ovejas ¿qué edad tiene el capitán del barco?”, a esta pregunta 76 de 97 estudiantes respondieron que el capitán tenía 36 años (Brousseau, Sarrazy & Novotná, 2014). Cuando los investigadores preguntaron a los

estudiantes qué pensaban del problema, varios señalaron que el problema era “estúpido”, sin embargo, lo habían respondido porque “el profesor lo pidió”. Luego, los investigadores plantearon la pregunta: “¿y si el capitán tuviera 50 años?”, algunos estudiantes respondieron: "entonces, el profesor no dio los números correctos ".

Este caso permite ilustrar dos niveles de ocurrencia del ‘contrato didáctico’ (Sarrazy, 1995). En un primer nivel se puede observar un conflicto entre el saber propio del alumno (el problema es absurdo) y lo que los alumnos creen que se espera el maestro de ellos (que respondan empleando los datos del enunciado). Lo que el estudiante sabe y logra percibir es correcto, no obstante, resulta débil ante el saber de la autoridad y lo que el maestro se espera de ellos. Por lo tanto, tienden a poner la expectativa de la autoridad por sobre el propio conocimiento incompleto y en formación. En un segundo nivel, desde un punto de vista matemático, puede observarse la construcción de reglas equívocas que han surgido en el grupo: que los problemas matemáticos siempre tienen solución o que las soluciones se obtienen siempre operando con los datos del enunciado.

Algunas investigaciones muestran que los efectos del contrato didáctico son más fuertes a partir de la enseñanza básica y los estudiantes preescolares tienden a tener, paradójicamente, mayor comprensión de situaciones problemáticas atípicas no calculables que sus pares de cursos más avanzados (Deliyianni, Monoyiou, Georgiou & Zannettou, 2009). Es decir, el contrato didáctico se instala de manera progresiva a través de la experiencia escolar y previo a una escolarización formal pareciera ser más débil.

La tendencia de los estudiantes a respetar el contrato didáctico ocasiona fracasos matemáticos cuando la situación es distinta a lo que están acostumbrados a practicar en sus

aulas, o cuando la repetición de acciones que garantizaba el éxito cambia ligeramente. Por esto, la ruptura del contrato didáctico es deseable y necesaria para que ocurra el aprendizaje, ya que esta ruptura implica distanciarse de lo que el profesor espera del alumno y asumir este último la responsabilidad genuina de resolver la situación planteada, ya no según lo que piensa que su profesor espera sino según lo que la situación misma presenta (Brousseau, 1986; 2007).

Un aspecto relevante del contrato didáctico es que, pese a compartir ciertos atributos generales, posee características que son específicas de un grupo en particular y se instala progresivamente entre un profesor y su grupo de estudiantes (Brousseau, 1986; Novotná & Sarrazy, 2010).

3.2.2. Modelo de análisis de los entornos didácticos

Como se ha descrito en el apartado anterior, la teoría de situaciones didácticas fue ideada para la construcción de diseños didácticos, es decir, no emerge con la finalidad de describir el aula “natural” o sin intervención del investigador. En este sentido, el modelo de análisis de los *entornos didácticos* (Novotná & Sarrazy, 2010), propone una operacionalización de los conceptos de la teoría de situaciones didácticas para el análisis de la clase de matemática, atendiendo a las características específicas del contrato didáctico presente entre un profesor y sus estudiantes.

Los entornos didácticos corresponden a las prácticas docentes descritas a partir de las variables didácticas que configuran un perfil de acciones del profesor (Novotná & Sarrazy, 2010; 2011). Estas acciones pueden conformar entornos donde el contrato didáctico presenta normas y expectativas, en relación a los estudiantes con los conocimientos, que son

específicas, y cuyas características dependen de las formas en las que se gestiona la enseñanza. Una enseñanza repetitiva, poco desafiante, que varía poco en sus formas de organización y en el tipo de tareas en las que se trabaja, conduce a los alumnos a una adaptación a las situaciones propuestas. Para adaptarse a las demandas habituales del maestro, los alumnos desarrollan estrategias de afrontamiento a partir de criterios usualmente utilizados. Los estudiantes pueden detectar fácilmente indicadores que les permitan adaptar sus decisiones y su comportamiento a las solicitudes didácticas de sus maestros. En ese caso, los estudiantes pueden aplicar un comportamiento adecuado sin entender exactamente el sentido de la lección o del problema que se les asignó. Contrariamente, cuando el profesor gestiona la enseñanza requiriendo un mayor involucramiento de parte de los estudiantes, usa tareas de diversa dificultad y las ideas de los alumnos son relevantes para el desarrollo de la clase, los estudiantes no pueden confiar únicamente en repetir mecanismos conocidos porque no pueden anticipar ni manejar las respuestas esperadas por el maestro. El compromiso de los estudiantes en la situación es mucho más probable. El contrato didáctico está presente en ambos entornos didácticos, sin embargo, sus características son distintas y, en consecuencia, los estudiantes se comportan de modos distintos en cada caso.

Los entornos didácticos pueden describirse a partir de seis dimensiones principales enfocadas a describir la estructura didáctica de la clase, la organización social de los estudiantes y la capacidad que muestra el profesor para pensar en problemas que varíen en su composición y dificultad. Cinco de estas dimensiones son observables directamente en el aula. La dimensión 6, en cambio, es obtenida a partir del análisis de problemas matemáticos inventados por el profesor, no directamente en el aula.

3.2.2.1. Dimensiones referidas a la estructura didáctica de la clase:

Las primeras 3 dimensiones describen aspectos referidos a la estructura didáctica de la lección. Los objetivos y las expectativas que el profesor espera de una clase en particular se ven reflejados en el diseño didáctico, en las tareas que propone, cómo dispone la presentación de los contenidos, si involucra más o menos a los estudiantes, y también en cómo responde a las producciones de los estudiantes. Estos elementos son capturados por los autores en las dimensiones: complejidad de las tareas, lugar de la institucionalización y modo de validación de las producciones.

1. **Complejidad de las tareas:** Las tareas empleadas por el profesor durante la clase condicionan las acciones de los estudiantes y enmarcan la actividad matemática en el aula. El nivel de complejidad de las tareas determina en gran medida la demanda cognitiva que los estudiantes experimentarán en la clase. Esta dimensión atiende a los propósitos de una tarea, desde la reiteración y aplicación de algoritmos enseñados por el profesor sin reflexión ni conexión con los conceptos que los subyacen hasta actividades de indagación, cuyo propósito puede involucrar que los estudiantes construyan estrategias o comprendan conceptos relevantes.

Los autores emplean la categorización de Smith y Stein (1998) que clasifica las tareas en: *tareas triviales*, que requieren el recuerdo de nociones que los estudiantes ya conocen, es posible observarlas en preguntas que el profesor realiza y que toda la clase responde a coro sin dificultad; *tareas de aplicación directa*, que requieren de la ejecución de un procedimiento conocido por el estudiante; *preguntas contextualizadas*, que requieren que el estudiante establezca una relación entre

tópicos matemáticos y situaciones elaboradas en contextos extra matemáticos; y *tareas de descubrimiento o problema*, que corresponden a aquellas preguntas cuya solución o método de solución no es conocido a priori por el estudiante y que requiere de un análisis más detenido.

2. **Lugar de la institucionalización:** La teoría de situaciones didácticas denomina *institucionalización* al momento donde el profesor conecta las ideas matemáticas que han logrado construir sus estudiantes vinculándolas con la matemática oficial (Brousseau, 2007). En esta variable se describe la manera en que se presentan los conocimientos matemáticos a la clase, observando si los procedimientos y nociones matemáticas son construidos entre el profesor y los estudiantes, o si el profesor los presenta de manera expositiva.

En específico, las nociones matemáticas (conceptos, algoritmos, resultados) pueden ser presentadas de manera directa por el profesor, al comienzo de la clase y sin ninguna intervención de los alumnos; después de preguntas que requieren que los estudiantes reconstruyan recuerdos de clases anteriores; pueden integrar ideas de los estudiantes mediante una pregunta que promueve el pensamiento; o, en casos más sofisticados, los conocimientos pueden ser el producto del trabajo de los estudiantes a lo largo de la clase en un problema, cuya solución son los contenidos que el estudiante es capaz de aprender, en la línea de la teoría de situaciones didácticas.

En efecto, dependiendo de cómo ocurra la institucionalización, los estudiantes pueden adoptar un rol más o menos activo en la construcción de las ideas que son institucionalizadas por el maestro.

3. Modos de validación de las producciones: Una producción matemática es una idea, solución o pregunta elaborada por un estudiante, que guarda relación con la matemática. Esta dimensión aborda la manera en que el profesor reacciona frente a las producciones de sus alumnos durante la clase. Estas reacciones pueden promover una actitud más activa o pasiva de parte de los estudiantes, ya que señalan tipos de comportamientos esperados, los que son progresivamente incorporados por los estudiantes y modelan la forma en que se relacionan con los saberes de la clase.

Por ejemplo, el profesor puede ignorar la producción del estudiante, puede validarla directamente diciendo que una idea es correcta o incorrecta, puede explicar una respuesta explicitando las razones de por qué una idea es correcta o incorrecta, puede pedir que sus estudiantes justifiquen por qué una respuesta es correcta o incorrecta y puede devolver una pregunta realizada por un estudiante para que esta sea reflexionada por la clase. Estas formas van en coherencia con lo que Brousseau (2007) define como momento a-didáctico, donde el rol del maestro consiste en devolver a los estudiantes la responsabilidad de generar por sí mismo las nociones matemáticas. En definitiva, reacciones del profesor como dar las soluciones, responder directamente si una respuesta es correcta o no, responder él mismo las preguntas en lugar de incentivar el pensamiento de los estudiantes, o corregir un error solo dando las respuestas sin mediar explicación se consideran validaciones directas y promueven un contrato didáctico pasivo de parte de los estudiantes. Por el contrario, evitar respuestas directas, devolver a los estudiantes las preguntas, promover una reflexión a partir de los errores, se consideran validaciones devolutivas.

3.2.2.2. Dimensiones referidas a la organización social de los estudiantes

El modelo de análisis presentado por Sarrazy, considera aspectos relativos a la organización social de los estudiantes, atendiendo a la comunicación entre los distintos actores del aula, las posibilidades y calidad de la comunicación y aspectos más concretos como la forma en que el profesor dispone a los estudiantes. En la teoría de situaciones didácticas la forma en que los estudiantes interactúan entre sí es crucial para el surgimiento de las nociones matemáticas, al mismo tiempo, la comunicación entre pares posibilita una interacción que no está marcada por la figura del profesor, quien representa la autoridad respecto al saber. Estos aspectos se profundizan en las dimensiones posibilidades de comunicación y disposición organizativa.

4. Posibilidad de comunicación: Esta dimensión captura las posibilidades que los estudiantes tienen de discutir ideas matemáticas con los distintos actores de la sala de clases, y si esa comunión es o no efectiva. La comunicación es central en la teoría de situaciones didácticas y la forma en que esta se establece es relevante en cada una de sus fases. Por ejemplo, en la fase a-didáctica las discusiones entre pares son fundamentales para que los estudiantes establezcan ideas y las contrapongan con las ideas de sus compañeros, el medio y sus retroacciones deben permitir que estas discusiones puedan clarificarse. En la fase de institucionalización la comunicación vuelve a ser relevante pues se pone en juego la capacidad del profesor de escuchar, comprender y dar espacio a las ideas de los estudiantes.

En una sala en que la comunicación se establece mayoritariamente entre profesor y alumno, los estudiantes suelen adoptar un rol más pasivo y receptivo, mientras que en los

cursos donde se promueve el diálogo entre estudiantes, quienes están en una misma jerarquía respecto al conocimiento, estos adoptan por lo general roles más activos en la discusión y en la construcción de ideas.

- 5. Disposición organizativa:** Atendiendo a la organización del aula, esta dimensión observa el modo en que el maestro dispone la sala de clases y cómo acomoda los puestos de los estudiantes, pudiendo estar sentados en grupos, en pares o de manera individual mirando hacia el frente. En la teoría de situaciones didácticas se espera que los estudiantes tengan tiempo para relacionarse de forma autónoma con los problemas o tareas, en grupos trabajando para solucionarlos conjuntamente y también que haya espacio para discusiones colectivas. Si bien, la forma en que se disponen los puestos de los estudiantes no garantiza una comunicación efectiva, puede incidir en esta.

3.1.2.3. Variabilidad de los problemas matemáticos

La sexta dimensión del modelo aborda la capacidad que tienen los maestros para generar problemas matemáticos que varíen en su dificultad. Esta dimensión no se observa directamente en la sala de clases, sino que se solicita a los profesores crear problemas que varíen en su dificultad, los que son posteriormente analizados a partir de la variación de la dificultad referida a distintos criterios.

Sarrazy (2002) muestra la importancia de la capacidad del maestro de variar la dificultad en los problemas, explicando que al emplear problemas o tareas poco variadas se lleva a una hiperadaptación de los alumnos a las situaciones propuestas. Para adaptarse a las demandas habituales del maestro, los alumnos desarrollan estrategias de afrontamiento en base a criterios usualmente utilizados. Los estudiantes pueden detectar fácilmente

indicadores que les permitan adaptar sus decisiones y su comportamiento a las solicitudes didácticas de sus maestros. En ese caso, los estudiantes pueden aplicar un comportamiento adecuado sin entender exactamente el sentido del problema que se les asignó. Contrariamente, en caso de fuerte variabilidad, el compromiso de los estudiantes en la situación es mucho más probable.

Para desarrollar esta dimensión, Sarrazy (2002) recopila investigaciones que apuntan a identificar la dificultad de los problemas matemáticos acotándolos al ámbito aritmético, y distingue 14 componentes distintas que inciden en la dificultad de un problema. Estas componentes son agrupadas en variables numéricas, retóricas y semántico-conceptuales.

Variables numéricas: Relacionadas con los aspectos numéricos, observa si el problema incluye números tales que se requiere de la ejecución de algoritmos o no, y si tiene en su redacción números que deban ignorarse o distractores para resolver el problema correctamente.

Variables retóricas: Relacionadas con la forma en que se organiza la presentación del problema, es decir, tipo de vocabulario empleado, si contiene verbos que indiquen la operación matemática a realizar (índice semántico), la familiaridad del tema con los contextos de los estudiantes, si su formulación es concisa o abunda en detalles narrativos y, por último, si el orden en que se presentan los hechos en el texto coincide con el orden temporal narrado.

Variables semántico-conceptuales: Relacionadas con aspectos estrictamente lógico-matemáticos, por ejemplo, el tipo de estructura aditiva (Vergnaud, 1983), el vínculo entre el

índice semántico y el operador, el vínculo entre el orden en que se presentan los números en el problema y el orden en que deben escribirse los datos para realizar el cálculo correcto.

4. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación empleó un enfoque de métodos mixtos (Creswell, 2014; Hernández, Fernández & Baptista, 2014), el que consiste en un “conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación, que implican la recolección y análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias producto de toda la información recabada” (Hernández, Fernández & Baptista, 2014, p. 534). Dada la complejidad del problema abordado se consideró pertinente incorporar tipos de evidencia complementaria que abarcaron tanto la relación entre entornos didácticos y desarrollo de la creatividad de un modo sistemático, como también una descripción más detallada y comprensiva del fenómeno.

En específico se optó por lo que Creswell (2014) define como *diseño secuencial explicativo*, el que incorpora dos fases secuenciales. En la primera fase el investigador recopila datos cuantitativos, analiza los resultados y luego los utiliza para planificar la segunda fase cualitativa. Los resultados cuantitativos generalmente orientan sobre los tipos de participantes que se seleccionarán para la fase cualitativa, así como los elementos en los que es necesario ahondar para complementar la información obtenida en la primera fase. La intención general de este diseño es que los datos cualitativos ayuden a explicar con más detalle los resultados cuantitativos iniciales.

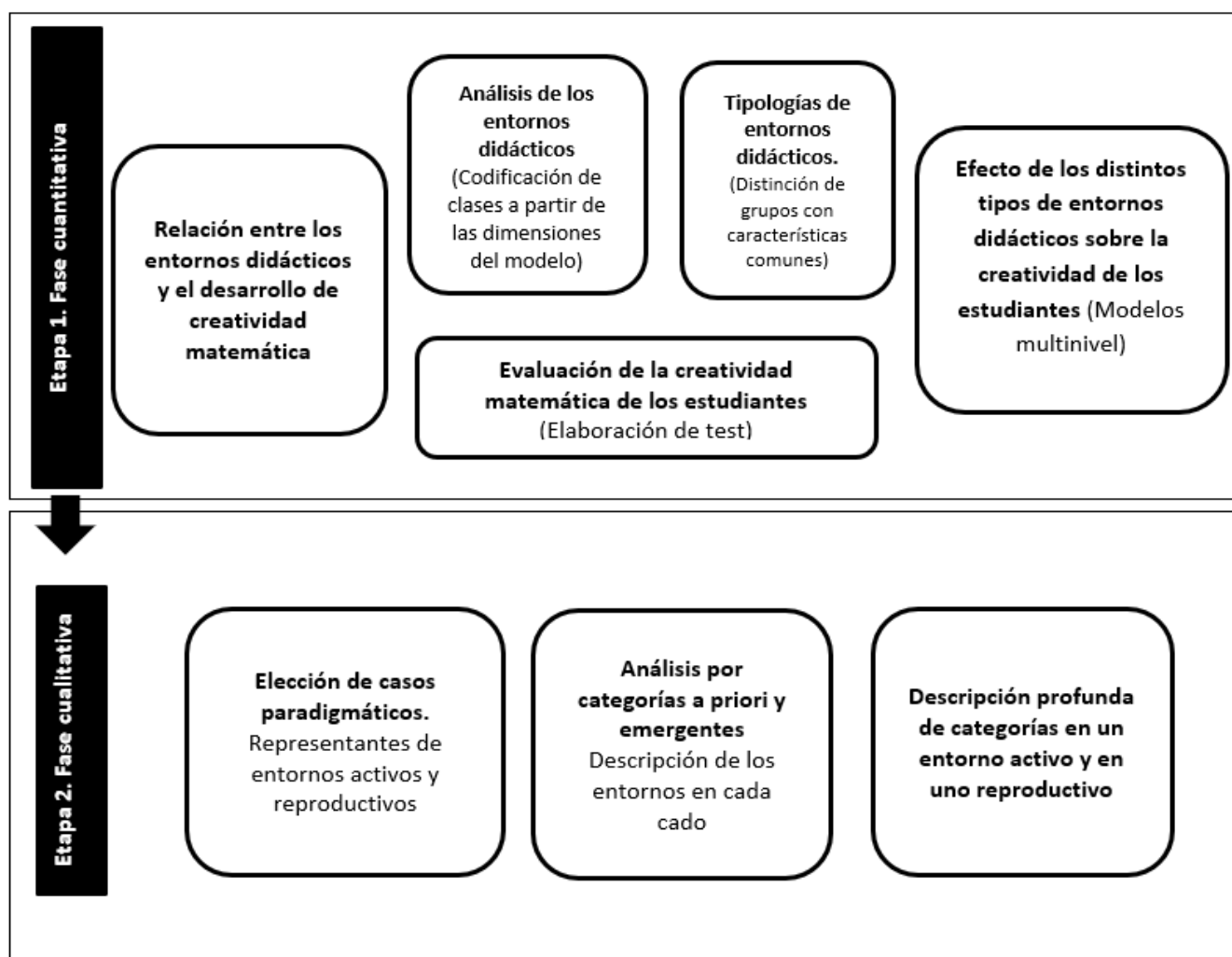
En concordancia con lo anterior, este diseño incorpora dos fases. La primera fase del estudio, de naturaleza cuantitativa, abordó los tres primeros objetivos específicos de la tesis. Se propuso hallar una relación entre los entornos didácticos y la creatividad matemática mediante el uso de instrumentos que permitieron codificar y cuantificar las variables

“creatividad matemática” y “entornos didácticos”. En específico, esta relación se estudió a partir de modelos multinivel para identificar la relación mediada por algunas variables de control.

Una vez analizados los resultados de la fase cuantitativa, se diseñó la segunda fase, de naturaleza cualitativa. Considerando los distintos tipos de entornos didácticos hallados mediante un análisis de clusters previo, se realizó un estudio de casos, donde se describieron casos considerados paradigmáticos de los distintos tipos de entornos. Lo anterior, con el objetivo de describirlos en profundidad y explicar la forma en que los entornos posibilitan el desarrollo creativo de los estudiantes en la clase (objetivo específico número 4).

A continuación, se presenta el desarrollo de cada una de las fases en el orden cronológico en que fueron ejecutadas. Así, este capítulo muestra tanto la metodología como los resultados de la primera fase cuantitativa. Luego, se argumentan las decisiones metodológicas de la segunda fase cualitativa, las que involucran algunos de los resultados de la primera fase, seguido de los resultados cualitativos. Esta estructura tiene por finalidad facilitar al lector la comprensión del diseño metodológico. La figura 1 muestra un resumen del diseño metodológico empleado en el estudio.

Figura 1:
Esquema del diseño metodológico



Fuente: Elaboración propia.

4.1. FASE CUANTITATIVA

4.1.1. Metodología fase cuantitativa

La primera fase del estudio consistió en un análisis multinivel, conocido también como análisis lineal jerarquizado (Murillo, 2008; Bickel, 2007) con dos niveles, los estudiantes que corresponden al nivel 1 y el aula que corresponde al nivel 2. Estos modelos permiten estudiar el efecto de variables independientes en una variable dependiente, en donde las variables independientes pueden corresponder al nivel 1 (por ejemplo, sexo) o al nivel 2 (características del aula). Según Murillo (2008), los modelos multinivel son la metodología de análisis más adecuada para trabajar con datos “jerarquizados” o “anidados” (por ejemplo, estudiantes en aulas, aulas en escuelas), esto la convierte en una estrategia adecuada para la investigación educativa de carácter cuantitativo, en los casos donde se requiere conocer cómo se relacionan las características del curso asociadas al profesor, o a una escuela con una variable dependiente. Lo anterior, posibilita realizar análisis tales como estimar cuanta varianza de los datos explica cada nivel de análisis en la variable dependiente (efecto del aula o la escuela) o la influencia de variables independientes de distintos niveles.

Para este estudio, la creatividad matemática de los estudiantes identificada mediante la aplicación de un test fue explicada a partir de las características de los entornos didácticos incorporando variables de control como el género, el nivel socioeconómico (NSE) de la escuela y el promedio del colegio obtenido en una prueba estandarizada nacional de matemática aplicada el año anterior al estudio (en adelante SIMCE). Las características de nuestra variable dependiente: la creatividad matemática de los estudiantes, está influenciada por el aula según la literatura, por lo que es necesario considerar su variación a nivel

estudiante y aula. De este modo, el modelo multinivel representa un modo de análisis adecuado para el objetivo de esta investigación.

4.1.1.1. Participantes

Se seleccionaron distintos cursos a partir de un muestreo no probabilístico intencional (Pineda, 1994). La muestra tuvo por objetivo incluir escuelas con distintos perfiles y pertenecientes a distintos niveles socioeconómicos. Se incluyeron en la muestra algunas escuelas con un perfil “alternativo” como escuelas artísticas, Montessori o Freinet, que manifiestan abiertamente en sus proyectos educativos el interés por desarrollar la creatividad en sus estudiantes.

Se eligió el nivel 5° básico para realizar el estudio por dos razones, por un lado, los instrumentos diseñados para evaluar creatividad matemática han sido elaborados mayoritariamente para niños de 10 a 12 años y, por otro lado, el nivel 5° básico cuenta con la evaluación SIMCE realizada en 4° básico del año anterior al estudio.

Se hizo un llamado masivo por medio de redes sociales a profesores que realizaran clases de matemática en 5° básico de escuelas tradicionales y alternativas, invitándolos a participar de esta investigación que tendría como retribución un taller docente sobre el tema. La muestra se compuso con los profesores que respondieron al llamado.

Participaron 21 cursos de nivel 5° básico correspondientes a 17 escuelas de la Región Metropolitana. El número total de estudiantes fue de 576, tamaño de muestra similar a otros estudios que han empleado análisis multinivel para determinar “efecto aula” con muestras pequeñas (e.g. Joet, Breassoux & Usher, 2011). Los cursos participantes se distribuyeron según perfil de la escuela y NSE como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1:

Distribución de los cursos participantes según nivel socioeconómico y perfil de la escuela.

Escuelas tradicionales				Escuelas alternativas	
NSE alto	NSE medio alto	NSE medio	NSE medio bajo	NSE alto	NSE medio
7	2	8	1	2	1

4.1.1.2. Instrumentos

Test de creatividad matemática

Para evaluar la creatividad matemática se diseñó y piloteó un instrumento a partir de una selección de ítems presentes en los test validados por Sighn (1987), Lee, Hwang y Seo (2003), Tabach y Fiedlander (2013) y Kwon et al. (2006). Estos test emplean ítems consistentes en problemas de solución múltiple, los que permiten a los estudiantes producir un conjunto de soluciones para cada ítem.

Las preguntas fueron elegidas según su dificultad y pertinencia para el contexto local, y fueron piloteadas previamente para asegurar que los estudiantes comprendieran las instrucciones. La versión piloto del test (ver Anexo 2) fue aplicada a un curso de 42 estudiantes de 5° básico pertenecientes a una escuela que no correspondía a la muestra, eliminándose dos preguntas por su excesiva dificultad. La versión final del instrumento (ver Anexo 1) se construyó usando los ítems que mostraron un buen funcionamiento en el piloto. El instrumento fue aplicado por el equipo de investigación en los 21 cursos participantes siguiendo un protocolo de aplicación (ver anexo 3) que aseguró la misma explicación de los ítems y el mismo tiempo de desarrollo (60 minutos) para todos los estudiantes.

Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas mediante la codificación en las tres dimensiones de creatividad matemática: fluidez, flexibilidad y originalidad, siguiendo las rúbricas de puntuación adaptadas de los test originales. Fluidez correspondió a un puntaje asignado por la cantidad de respuestas correctas diferentes. Flexibilidad se obtuvo a partir de la suma de las distintas estrategias empleadas por los estudiantes en sus soluciones. El puntaje asignado a la dimensión Originalidad se estableció dando mayor puntaje a las estrategias empleadas por una menor cantidad de estudiantes. Las rúbricas de puntuación se detallan en el Anexo 4.

Los puntajes de fluidez, flexibilidad y originalidad fueron sumados para obtener el puntaje total de cada alumno. Los puntajes asignados a cada una de las tres dimensiones para cada uno de los tres ítems del instrumento generaron un total de 9 indicadores por alumno, se estimó el coeficiente alfa de Cronbach con estos 9 indicadores y resultó en 0.73, lo que muestra una confiabilidad adecuada para un test de estas características. Respecto a las correlaciones ítem-test, estuvieron en un rango entre 0.274 y 0.589, lo que indica que todos los indicadores considerados discriminan apropiadamente.

Modelo de análisis de entornos didácticos

Se filmaron dos clases consecutivas de matemáticas a cada curso participante. Cada profesor realizó clases normales según su planificación y el contenido a tratar no fue designado por la tesista. Estas clases fueron posteriormente analizadas según una pauta (ver anexo 6) creada a partir del modelo de análisis de entornos didácticos (Sarrazy & Novotná, 2013). La pauta examinó 5 dimensiones en segmentos de 20 minutos y las puntuó entre 0 y

1. Finalmente se promediaron los puntajes de los segmentos para obtener el puntaje final de cada una de las 5 dimensiones para cada profesor.

Las dimensiones observadas fueron las siguientes:

1. Dificultad de las tareas: Observa si el profesor emplea tareas triviales, de aplicación directa, contextualizadas o problemas no triviales. En cada segmento se asignó el puntaje asociado a la tarea o pregunta de mayor dificultad dada por el profesor.
2. Institucionalización del saber: Observa la manera en que el profesor enseña los conceptos y nociones matemáticas en relación a la participación más o menos activa de los estudiantes en la construcción de ese saber. En cada segmento un puntaje más cercano a 1 indica un mayor involucramiento de los estudiantes en el establecimiento de las ideas matemáticas.
3. Modos de validación de las producciones de los estudiantes: Se observó la reacción del profesor ante las producciones o preguntas de los estudiantes. En cada segmento un puntaje más cercano a 1 indica que el profesor reaccionó pidiendo una mayor participación de los estudiantes: por ejemplo, pidió justificar una idea matemática o devolvió la pregunta a los estudiantes, y cero indica una mayor pasividad: por ejemplo, el profesor da las respuestas, el profesor ignora preguntas, etc.
4. Posibilidades de comunicación: Se observó con quienes se comunicaron los estudiantes en la clase, con el compañero, con toda la clase, con el profesor. Un puntaje más cercano a 1 indica que los estudiantes pudieron comunicarse con más actores de la clase, y un puntaje más cercano 0 indica menor interacción social.

5. Disposición organizativa: Se observó el modo en que fueron dispuestos los estudiantes: en grupos, en pares, de a uno. Un puntaje más cercano a 1 indica que el profesor sentó a los estudiantes en grupos la mayor parte del tiempo y un puntaje más cercano a cero indica que los estudiantes se sentaron de forma individual.

Variabilidad en la dificultad de las tareas creadas por el profesor

Para evaluar esta sexta dimensión se solicitó a los profesores participantes crear tres problemas para sus estudiantes de 5° básico que se resolvieran usando adición y tres problemas que se resolvieran usando sustracción (ver Anexo 5). Los problemas fueron analizados a partir de las variables descritas por Sarrazy (2002), las que se indican en la Tabla

2. La forma en que estas variables fueron codificadas se detalla en el Anexo 6.

Tabla 2:

Descripción de variables sobre la variabilidad en la dificultad de las tareas.

Descripción de variables sobre la variabilidad en la dificultad de las tareas:						
Tipo de variable	Modalidades evaluadas					
<i>Variables numéricas</i>						
1 Tipos de números utilizados	Requiere algoritmo			No requiere		
2 Datos irrelevantes	Presencia			Ausencia		
<i>Variables retóricas</i>						
3 Índice semántico	Presencia			Ausencia		
4 Contextos familiares	Presencia			Ausencia		
5 Disparador semántico	Presencia			Ausencia		
6 Organización sintagmática y organización temporal	Coincide			No coincide		
7 Posición de la pregunta	Inicio	Medio		Final		
8 Vocabulario	Conocido			Desconocido		
9 Formulación	Clásico			Narrativo		
<i>Variables semántico-conceptuales</i>						
10 Estructura aditiva	1	2	3	4	5	6
11 Naturaleza de lo desconocido	Inicial			Final		
12 Correspondencia orden sintagmático y orden operativo	Coincidencia			No coincidencia		
13 Correspondencia desencadenante y operador matemático	Coincidencia			No coincidencia		
14 Correspondencia índice semántico y el operador matemático	Coincidencia			No coincidencia		

Para calcular el puntaje de variabilidad se siguió el procedimiento utilizado en Sarrazy (2002) que consistió en contar, para cada una de las 14 variables, las variaciones observadas (Vo) sobre los 3 problemas de adición en su conjunto en relación con el número de variaciones posibles (Vp). Así, cada variable obtuvo un índice $I=Vo/Vp$. El mismo análisis se realizó para los problemas de sustracción. Se calculó el promedio aritmético de las variables numéricas, retóricas y semántico conceptuales. Finalmente, el índice quedó determinado por la fórmula:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{voi}{vpi}}{2} + \frac{\sum_{i=3}^9 \frac{voi}{vpi}}{7} + \frac{\sum_{i=4}^{14} \frac{voi}{vpi}}{5}$$

4.1.1.3. Análisis estadísticos

En esta sección se describen los análisis estadísticos realizados. Las variables consideradas en el análisis y el total de datos perdidos se describen en la Tabla 3. Respecto a los datos perdidos, se presentaron dos casos: un valor perdido para la variable D6, ya que una profesora no respondió la actividad de invención de problemas, y el promedio en la prueba SIMCE de una escuela alternativa no reconocida por el Ministerio de Educación. Para no perder la información del curso completo se optó por imputar estos valores con la media aritmética del resto de los casos.

Tabla 3:
Descripción de las variables y del total de perdidos

Variable	Nombre para los análisis estadísticos	Nivel	Tipo	Valores	Rango	N Perdidos
Creatividad matemática	y	estudiante	numérica	-	0 – 50	0
Sexo	sexo	estudiante	categorica	hombre mujer	-	0
Dificultad de las tareas	D1	clase	numérica	-	0-1	0
Institucionalización del saber	D2	clase	numérica	-	0-1	0
Modos de validación de las producciones de los estudiantes	D3	clase	numérica	-	0-1	0
Posibilidades de comunicación	D4	clase	numérica	-	0-1	0
Disposición organizativa	D5	clase	numérica	-	0-1	0
Índice de variabilidad en la dificultad de las tareas	D6	clase	numérica	-	0-1	1
Nivel socioeconómico de la escuela	NSE	clase	categorica	medio bajo medio medio alto alto	-	0
Promedio SIMCE de matemáticas de la escuela	simce	clase	numérica	-	150-380	1
Escuela de perfil tradicional o alternativo	perfil	clase	categorica	tradicional alternativo	-	0

Para obtener un indicador categórico de los entornos didácticos de los profesores y poder distinguir entornos didácticos con distintas características se realizó un análisis de grupos o clusters con el algoritmo k-means (Fielding, 2006). Este método busca generar

grupos que sean distintos entre sí, pero que las observaciones adentro de cada grupo sean similares. Para definir el número de grupos o clusters a extraer se consideró el método del codo (Fielding, 2006). Las variables consideradas fueron D1, D2, D3, D4, D5 y D6. A partir de este análisis se definió la variable *entornos* que indica, para cada profesor, el cluster al que pertenece. Este cluster se consideró como un indicador del entorno didáctico del curso.

Para estimar el efecto de los entornos didácticos en la creatividad matemática se consideraron modelos multinivel con dos niveles (estudiante y clase). Se estimaron tres modelos, los que se describen en la Tabla 4. El primer modelo corresponde al modelo nulo y no incluyó ninguna variable independiente, sólo efectos aleatorios al nivel del estudiante y escuela. Esto permitió estimar como se distribuyó la varianza entre los dos niveles. El segundo modelo incluyó a los entornos didácticos (*entornos*) como variable independiente, lo que permitió estimar su efecto sin controlar por ninguna variable. Finalmente, el tercer modelo incluyó las variables de control consideradas en el estudio: sexo, NSE, perfil y SIMCE.

Respecto al ajuste de los modelos, se consideraron varios índices de ajuste (deviance, AIC y BIC). La utilidad de estos índices es que permiten comparar el ajuste de los modelos, considerando también su parsimonia. En todos se cumple que un menor valor indica un mejor ajuste. En el caso de la deviance, se pueden hacer test estadísticos que indiquen si su disminución es significativa (Pinheiro et al., 2017).

Tabla 4:
Descripción de los modelos multinivel estimados.

Modelo	Formulación	Descripción
1	$y_{ij} = \beta_0 + \mu_j + \varepsilon_{ij}$	Modelo nulo
2	$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \text{entornos}_j + \mu_j + \varepsilon_{ij}$	Modelo con el efecto de entornos en la creatividad matemática.
3	$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \text{entornos}_j + \beta_2 \text{sexo}_{ij} + \beta_3 \text{NSE}_j + \beta_4 \text{perfil}_j + \beta_5 \text{simce}_j + \mu_j + \varepsilon_{ij}$	Modelo con el efecto de entornos y variables de control en la creatividad matemática.

Todos los análisis estadísticos se realizaron con el software R, la definición de los clusters se realizó con la función kmeans del paquete Stats (R Core Team, 2016). La estimación de los modelos multinivel se realizó con la función lme del paquete Nlme (Pinheiro et al., 2017).

4.1.2. Resultados Fase Cuantitativa

Esta primera fase del estudio abordó los tres primeros objetivos específicos de la tesis. A continuación, se presentan los resultados para cada uno de estos objetivos.

4.1.2.1. Objetivo 1: Evaluación de la creatividad matemática

El objetivo específico 1 estuvo orientado a evaluar la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico, lo que se realizó mediante la elaboración, pilotaje y aplicación de un test basado en ítems de soluciones múltiples. La tabla 5 muestra los estadísticos descriptivos de la muestra total. Este puntaje correspondió a la suma de los nueve puntajes parciales, correspondientes a las tres dimensiones para los tres ítems que componían el test. Pese a que el puntaje promedio de 13 puntos puede corresponder a distintas performances, puede ejemplificarse con un desempeño de tres o cuatro soluciones correctas distintas en cada ítem (fluidez: 2) y el uso de una o dos estrategias distintas por ítem (flexibilidad: 1 o 2) cuya frecuencia es alta (originalidad: 0). El puntaje máximo (41 puntos) representa un desempeño de entre 9 y 15 soluciones distintas por ítem (fluidez: 5 o 6) usando entre 3 y 4 estrategias distintas (flexibilidad: 3 o 4) y con estrategias poco o muy poco usadas por el resto (originalidad: 4 a 6). El puntaje mínimo representa estudiantes que no realizaron ninguna solución correcta.

Tabla 5:
Estadísticos descriptivos test de creatividad matemática

N	Media	D.E.	Mínimo	Máximo
576	13.12	6.10	0	41

Sobre las dimensiones de creatividad: fluidez, flexibilidad y originalidad, la tabla 6 muestra que de las dimensiones evaluadas el mayor puntaje promedio se obtuvo en fluidez, donde la media 7,3 representa la elaboración de 14 o 15 soluciones distintas en total (considerando desempeño en los 3 ítems). Sobre la dimensión flexibilidad la media 4,5 representa entre 4 y 5 estrategias distintas de respuesta para los 3 ítems. La dimensión originalidad obtuvo en promedio un puntaje muy bajo (2,1), sin embargo, esto es concordante con la definición de la dimensión, que asigna puntajes más altos a las soluciones menos frecuentes, por lo que pocos niños obtuvieron puntajes altos en esta dimensión.

Tabla 6:

Estadísticos descriptivos dimensiones de creatividad matemática

Dimensión	N	Media	D.E.	Mínimo	Máximo
Fluidez	576	7,3	3,2	0	17
Flexibilidad	576	4,5	1,7	0	11
Originalidad	576	1,3	2,1	0	14

Nota: Cada dimensión corresponde a la suma de los puntajes obtenidos para esa dimensión en los 3 ítems

El desempeño por dimensión en cada uno de los ítems que componían el test se muestra en la tabla 7. Este desempeño varió en función de la dificultad de los ítems. Si se observa la dimensión fluidez puede establecerse que en el ítem 1 los estudiantes pudieron producir menos soluciones y con una menor cantidad de estrategias que en los otros ítems. Este ítem implicaba generar figuras con un área determinada. En el ítem 2, en el que debían realizarse cálculos aritméticos, tanto fluidez como flexibilidad, fueron en promedio mayores, no así originalidad. El ítem 3, donde se debía dividir una figura en figuras de igual área, mostró puntajes en promedio mayores que el ítem 1 y menores que el 3 en todas las dimensiones.

Tabla 7:

Estadísticos descriptivos dimensiones para cada uno de los ítems

Ítem	Dimensión	Máx. posible	Media	D.E.	Mínimo	Máx.
1	Fluidez	6	1,1	1,4	0	6
	Flexibilidad	7	1,1	1,1	0	5
	Originalidad	6	0,7	1,3	0	6
2	Fluidez	6	3,7	2,0	0	6
	Flexibilidad	4	1,7	0,7	0	4
	Originalidad	4	0,3	1,0	0	4
3	Fluidez	5	2,5	1,2	0	5
	Flexibilidad	6	1,7	0,7	0	4
	Originalidad	4	0,4	0,9	0	4

Al observar los puntajes en el test según nivel socioeconómico (ver Tabla 8) se observa que los estudiantes de colegios pertenecientes al nivel socioeconómico alto obtuvieron una media más de 5 puntos mayor a la media de los estudiantes pertenecientes a colegios de nivel socioeconómico medio-bajo. Este ordenamiento en las medias se mantiene en los niveles medio y medio alto. Es importante notar que en todos los niveles socioeconómicos hubo niños con puntajes muy por sobre el promedio, por ejemplo, el mayor puntaje de un alumno de nivel socioeconómico medio-bajo es de 28 puntos, lo que corresponde a más de una desviación estándar por sobre el promedio de alumnos del nivel socioeconómico alto.

Tabla 8:

Puntajes del test de creatividad matemática según nivel socioeconómico.

NSE	N	Media	D.E.	Mínimo	Máximo
Medio bajo	30	9.57	5.96	2	28
Medio	270	11.76	5.32	0	31
Medio alto	63	12.94	4.46	4	30
Alto	213	15.39	6.69	2	41

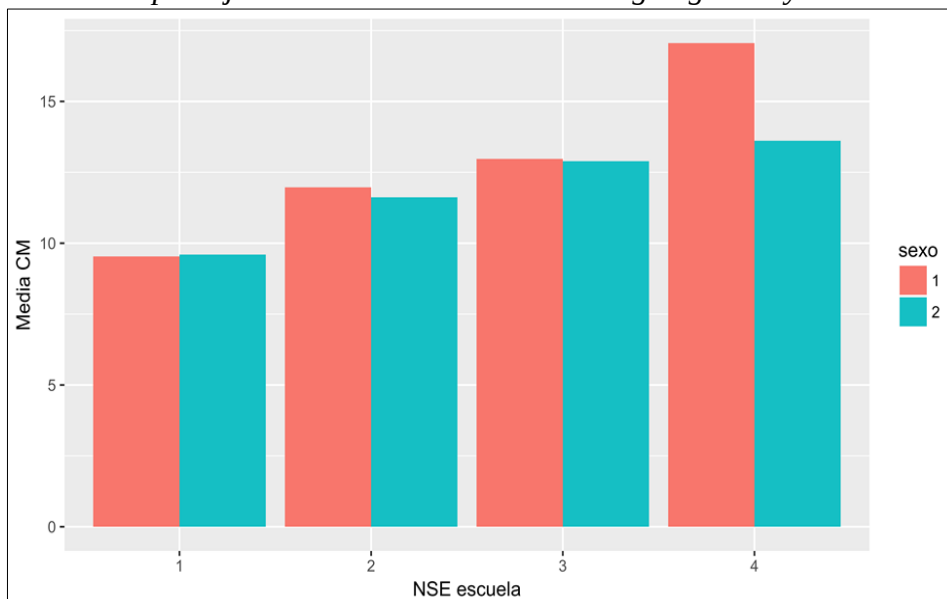
Al observar desempeño diferenciado por género (ver Tabla 9) puede observarse que el promedio del puntaje de las niñas en la muestra total fue 1,5 puntos mayor al promedio del puntaje de los niños. La figura 2 muestra que, en todos los niveles socioeconómicos, salvo en el nivel medio-bajo, las niñas obtuvieron un promedio mayor, siendo esta diferencia a favor de las niñas mayor en el nivel socioeconómico alto.

Tabla 9:

Puntajes test de creatividad matemática según género

Sexo	N	Media	D.E.	Mínimo	Máximo
Mujer	267	14.06	6.37	0	41
Hombre	309	12.30	5.74	2	31

Figura 2:
Medias del puntaje de creatividad matemática según género y NSE



Nota: Sexo. 1: niñas, 2: niños; NSE. 1: medio-bajo, 2: medio, 3: medio alto, 4: alto.

Fuente: Elaboración propia

Finalmente, se muestran los estadísticos descriptivos de los puntajes obtenidos en el test por cada uno de los cursos participantes (ver Tabla 10). Se observa que, si bien los puntajes promedio de los cursos guardan relación con el NSE, hay diferencias al interior de cada nivel socioeconómico. Asimismo, las desviaciones estándar son distintas, habiendo desempeños más y menos homogéneos al interior de cada curso.

Tabla 10:

Puntajes test de creatividad matemática para cada curso participante

Curso	NSE	N	Media	D.S.	Mínimo	Máximo
1	Medio bajo	30	9,57	5,96	2	28
2	Medio	33	10,73	4,09	3	21
3	Medio	27	14,37	5,97	5	31
4	Medio	35	10,63	4,84	3	23
5	Medio	41	12,54	5,98	4	28
6	Medio	31	10,26	5,67	2	22
7	Medio	41	13,88	4,40	4	30
8	Medio	24	9,88	2,89	5	15
9	Medio	24	12,08	6,26	4	23
10	Medio	14	9,5	5,56	0	21
11	Medio alto	31	13,13	5,41	6	30
12	Medio alto	32	12,75	3,38	4	19
13	Alto	23	18,22	7,80	7	37
14	Alto	12	11,17	5,65	5	25
15	Alto	28	16,64	4,02	10	27
16	Alto	30	13,53	5,02	6	28
17	Alto	16	15,88	8,10	7	35
18	Alto	21	18,14	7,72	8	41
19	Alto	24	11,88	6,73	3	29
20	Alto	28	16,68	6,93	6	32
21	Alto	31	15,03	5,97	2	31

4.1.2.2. Objetivo 2: Caracterización de los entornos didácticos

Los promedios de los puntajes obtenidos para cada una de las seis dimensiones de entornos didácticos se muestran en la tabla 11. La dimensión que obtuvo un mayor promedio correspondió a las posibilidades de comunicación entre estudiantes, lo que puede indicar una inclinación de estos profesores a realizar clases con mayor interacción social al menos en las dos clases filmadas. La dimensión 5 muestra el menor puntaje promedio, esto indica a modo general una tendencia a sentar a los alumnos de forma individual o en parejas. La dificultad

de las tareas propuestas tiene un puntaje promedio de 0,59 mostrando una fuerte variación entre los profesores. En la dimensión 2, se observó una inclinación a presentar los contenidos después de preguntas triviales, siendo poco frecuentes las clases donde las nociones matemáticas eran elaboradas en conjunto con los estudiantes. También se observó variedad en la dimensión 3, donde los profesores estuvieron en un rango de 0,38, puntaje que indica una forma más pasiva de responder a las producciones matemáticas de los alumnos, hasta un puntaje máximo de 0,75, lo que indica una forma de respuesta más activa, solicitando justificaciones o devolviendo las preguntas a los estudiantes.

Tabla 11:

Estadísticos descriptivos para cada dimensión de los entornos didácticos

Variable	N	Media	D.E.	Mínimo	Máximo
D1	21	0.59	0.11	0.44	0.92
D2	21	0.53	0.07	0.45	0.75
D3	21	0.58	0.10	0.38	0.75
D4	21	0.68	0.09	0.47	0.81
D5	21	0.42	0.19	0.33	1.00
D6	21	0.65	0.06	0.55	0.78

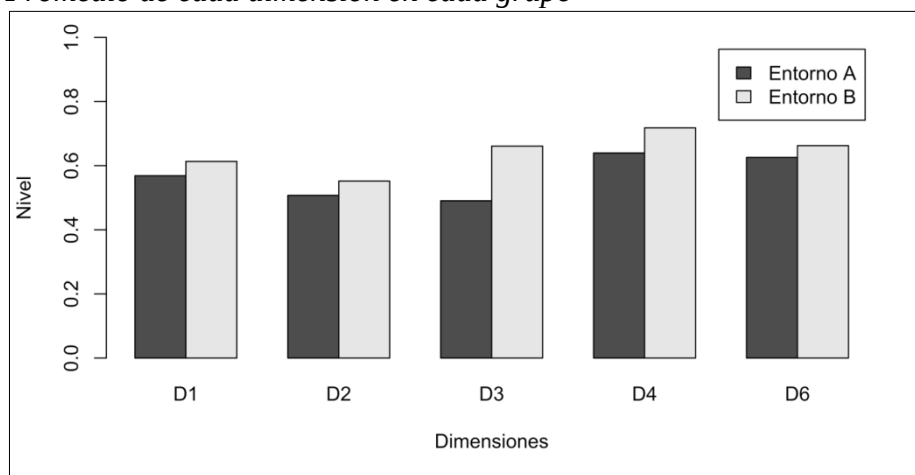
Los puntajes para cada una de las dimensiones van desde 0 (menor desempeño) a 1 (mayor desempeño)

Al realizar la conformación de grupos o cluster de acuerdo a las características en las variables D1, D2, D3, D4, D5 y D6, en una primera agrupación, los grupos solo diferían en sus promedios en la variable D5. Esto se explica porque D5 no tiene una relación fuerte con las otras variables y su varianza es mayor en comparación a las otras. Por otro lado, conceptualmente esta variable no distingue aspectos didácticos como el resto, sino que

aspectos de organización de la clase. En función del comportamiento estadístico y a su definición conceptual, se decidió eliminar a la variable D5 de este análisis. Al rehacer el análisis de grupos con las variables D1, D2, D3, D4 y D6, el método del codo sugería extraer dos o tres grupos. Se extrajeron varias veces dos o tres grupos, al extraer dos grupos los resultados eran estables, es decir, el algoritmo llegaba aproximadamente a los mismos grupos cada vez. Sin embargo, al extraer tres grupos, las características y tamaño de los grupos cambiaban. En consecuencia, se extrajeron solamente dos grupos.

En el primer grupo se ubicaron 10 profesores. En el segundo grupo se ubicaron 11 profesores. Las características promedio de los profesores en cada grupo se presentan en el gráfico de la Figura 3. Las aulas del primer grupo mostraron un promedio menor que las del segundo grupo en todas las variables, tal como muestra el gráfico de la figura 3. A modo general, las aulas del segundo grupo tuvieron altos puntajes en todas o en la mayoría de las dimensiones consideradas. Producto de estas diferencias, en adelante, llamaremos *entornos activos* a las aulas del segundo grupo y *entornos reproductivos* a las aulas del primer grupo.

Figura 3:
Promedio de cada dimensión en cada grupo



Fuente: Elaboración propio

Para ver cómo se distribuían los entornos didácticos de acuerdo al nivel socioeconómico y perfil de la escuela se estimaron tablas de contingencia (Tabla 12 y Tabla 13). La Tabla 12 muestra que ambos entornos didácticos se observaron en todos los niveles socioeconómicos, salvo para el nivel medio bajo, en donde solo se encontró el entorno activo. La Tabla 13 muestra que ambos entornos didácticos se observaron en escuelas con distintos perfiles. Lo anterior, implica que para esta muestra los tipos de entornos activos y reproductivos no se agruparon en un mismo nivel socioeconómico ni en un mismo perfil de escuela. Este resultado no es generalizable a las escuelas chilenas, ya que nuestra muestra contiene profesores que estuvieron interesados en participar en un taller docente sobre creatividad y matemáticas, lo que pudo inclinar la muestra hacia profesores particularmente motivados. Sin embargo, esta distribución resultará muy importante para el objetivo general de esta investigación ya que al contar con distintos entornos en varios NSE y perfiles se podrá identificar el efecto de tales entornos en la creatividad matemática.

Tabla 12:

Tabla de contingencia entre el nivel socioeconómico de la escuela y el entorno didáctico

		Entornos didácticos	
		Entornos reproductivos	Entornos activos
Nivel socioeconómico	Medio bajo	0	1
	Medio	3	6
	Medio alto	1	1
	Alto	6	3

Tabla 13:

Tabla de contingencia entre el perfil de la escuela y el entorno didáctico

		Entornos didácticos	
		Entornos reproductivos	Entornos activos
Perfil de la escuela	Tradicional	8	10
	Alternativo	2	1

4.1.2.3. Objetivo 3: Relación creatividad matemática y entornos didácticos

Para determinar la relación entre los entornos didácticos y la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico, se estimaron tres modelos multinivel. Los resultados de estos modelos se presentan en la Tabla 14.

El primer modelo (nulo) muestra que un 16% de la varianza en la creatividad matemática se explica a nivel aula y un 84% se explica a nivel individual. Esto muestra que hay una influencia del aula en la creatividad y que ésta no depende solamente del individuo. Esto, además, justifica el uso de los modelos multinivel. Esta agrupación en principio no implica que el tipo de enseñanza afecte los puntajes, sino que existe una agrupación que puede asociarse a cualquier factor que afecte al curso completo.

En el segundo modelo, se estima el efecto de los entornos didácticos sin incluir ninguna otra variable. El modelo muestra que el efecto de estar inmerso en el Entorno activo, tiene un efecto no significativo. Sin embargo, en este modelo probablemente el efecto del entorno didáctico está sesgado, ya que no se controla por ninguna otra variable. La deviance y el AIC indican un mejor ajuste del modelo 2, pero las diferencias son muy pequeñas. El BIC indica un mejor ajuste del modelo 1.

Finalmente, el modelo 3 indica el efecto del entorno didáctico considerando las variables NSE, SIMCE, género y perfil del establecimiento. Al considerar todos estos criterios, el entorno didáctico activo muestra un efecto positivo y significativo sobre la creatividad matemática. Respecto a las otras variables, el que un estudiante sea de sexo femenino tiene un efecto positivo y significativo. Se observan, además, efectos significativos del grupo socioeconómico, para esta estimación se considera como referencia el nivel socioeconómico medio bajo. El efecto del NSE muestra una diferencia significativa de 5,51 puntos al pertenecer a un NSE alto respecto del NSE medio-bajo. Finalmente, el efecto del puntaje SIMCE en matemáticas de la escuela, obtenido por los 4° básicos del año 2017, no fue significativo, sin embargo, estuvo asociado a un p-valor de 0.065, lo que sugiere algún grado menor de significancia. Se debe considerar que la medida usada para la variable SIMCE no corresponde a una medida individual, sino al promedio del curso en la prueba SIMCE de matemática del año anterior al estudio, por lo que el p-valor asociado a esta variable no es concluyente. Respecto a los índices de ajuste, la deviance y el AIC indican que el modelo 3 tiene un mejor ajuste que el modelo 2, justificando la inclusión de las variables de control.

Tabla 14:
Resultados de los modelos multinivel.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Efectos Fijos			
Intercepto	13.17**	12.76**	-2.60
Entornos (Entorno activo)		0.77	1.91*
Sexo (mujer)			1.40**
NSE (Medio)			2.21
NSE (Medio alto)			3.42 ^a
NSE (Alto)			5.51**
Perfil (Alternativo)			-0.49
SIMCE			0.04 ^a
Efectos Aleatorios			
Varianza entre clases	6.17	6.43	0.85
Varianza entre estudiantes	31.80	31.78	31.50
Índices de ajuste			
Deviance	3663.312	3660.698	3623.892
AIC	3669.311	3668.698	3643.892
BIC	3682.374	3686.108	3687.313
El super índice ^a indica un p-valor<0.1, el super índice * indica p-valor<0.05 y el super índice ** indica un p-valor<0.01.			

A modo general, se observa que las características del aula de matemática en las que ha indagado esta investigación han resultado relevantes para establecer el nivel de creatividad matemática evaluado en los alumnos participantes. Esta importancia se refleja en que los estudiantes pertenecientes a las aulas que conformaron el cluster denominado Entornos activos, obtuvieron una media de 1.9 puntos mayor a la de los estudiantes cuyos profesores estuvieron en el cluster denominado Entornos reproductivos, una vez que fueron incorporadas las variables de control género, NSE, SIMCE y perfil de la escuela.

4.2. FASE CUALITATIVA

4.2.1. Metodología fase cualitativa

Siguiendo la lógica del diseño secuencial explicativo, la fase cualitativa tuvo el propósito de contribuir a explicar con mayor detalle la relación hallada en la primera fase cuantitativa (Creswell, 2014). En la fase anterior, mediante un análisis de clusters, se consiguió obtener una variable categórica para los entornos didácticos, obteniéndose grupos con características similares al interior de cada grupo, denominados *entornos activos*, con mayores puntajes promedio en todas las variables del modelo de entornos didácticos; y *entornos reproductivos*, con menores puntajes promedio. Se encontró, además, una influencia positiva de los entornos activos sobre los puntajes en el test, considerando variables de control. Por razones propias del diseño cuantitativo los datos no permitieron levantar un análisis descriptivo de los tipos de entornos, descripción que apareció como un aspecto clave a considerar para comprender *cómo* los entornos pueden influir en la creatividad en el aula. En consideración de lo anterior, como sugiere Creswell (2014), la fase cualitativa se propuso profundizar estos elementos clave surgidos de la fase anterior mediante una descripción profunda de los tipos de entornos.

En concreto, mediante técnicas cualitativas la segunda fase de la investigación abordó el objetivo específico nº 4 de la tesis, “describir la forma en que los entornos didácticos influyen en la creatividad matemática de los estudiantes en el aula”. Específicamente, se usó una metodología basada en el estudio de casos. Los casos seleccionados se consideraron paradigmáticos, es decir, se consideró que representaban adecuadamente las características de cada uno de los entornos didácticos hallados en la fase cuantitativa y que, además,

cumplían con criterios de selección que los hicieran comparables. A continuación, se detallan las decisiones metodológicas de esta fase.

4.2.1.1. Estudio de casos

El estudio de casos corresponde a un tipo de investigación cualitativa que busca comprender cómo determinados fenómenos ocurren en situaciones particulares (Martínez, 2011). Según Yin (2002), un caso corresponde a un fenómeno que ocurre dentro de un contexto de la vida real, y donde los límites entre el fenómeno y el contexto no son claros y el investigador tiene poco control sobre el fenómeno y el contexto. El estudio de casos consiste a la investigación empírica que analiza los casos abordando preguntas de "cómo" o "por qué" relacionadas con el fenómeno de interés. Esta técnica es pertinente para abordar el objetivo antes señalado, atendiendo al “cómo” los entornos didácticos influyen en la creatividad de los estudiantes. Por otro lado, tal como señala Yin (2002) se tiene poco control de los límites entre el fenómeno (desarrollo de la creatividad) y el contexto (aulas de matemática), por lo que esta técnica resulta adecuada para esta fase de la investigación.

4.2.1.2. Selección de los casos

La selección de los casos se realizó con el fin de que resultaran paradigmáticos de cada uno de los entornos y, al mismo tiempo, fueran comparables entre sí. Se entendió por “caso paradigmático” a aquel que representa adecuadamente las características del grupo que se quiere estudiar, en este caso, las características descritas para cada uno de los tipos de entornos didácticos.

La unidad de análisis del caso correspondió a un curso (profesor y alumnos), a través de los videos de clases que fueron grabados en la fase cuantitativa (videos de 2 clases consecutivas de cada profesor).

Para que los casos fueran comparables entre sí, se establecieron criterios de selección con la intención de que ambos casos pertenecieran a contextos lo más parecido posible. Esto permitió centrar la comparación en aspectos estrictamente didácticos y no referidos a diferencias contextuales. Por lo anterior, los criterios de selección fueron los siguientes:

- Que ambos cursos pertenecieran a un mismo nivel socioeconómico.
- Que ambos cursos pertenecieran a colegios con un mismo perfil (tradicional o alternativo)
- Que ambos cursos tuvieran un número similar de alumnos por sala.
- Que ambos cursos correspondieran a cursos de colegios mixtos o diferenciados por género.
- Que ambos cursos hubieran trabajado en la enseñanza del mismo contenido matemático.

Teniendo en consideración estos criterios, los casos seleccionados correspondieron a dos cursos pertenecientes a colegios tradicionales de nivel socioeconómico alto. Cada curso tenía alrededor de 25 estudiantes. Ambos cursos trabajaron la enseñanza de fracciones. Uno de los cursos abordó comparación de fracciones, y el otro curso abordó comparación, adición y sustracción de fracciones. Además, observando los videos de los casos seleccionados, se verificó que ambos reunían las características clave de cada uno de los tipos de entornos descritos en la fase anterior, por lo que fueron considerados paradigmáticos y, por tanto,

adecuados para que su estudio en profundidad permitiera complementar los hallazgos de la primera fase.

4.2.1.3. Análisis

Los videos de clases de los profesores fueron transcritos incluyendo los diálogos de profesores y alumnos, además de comentarios descriptivos y esquemas o imágenes para complementar los diálogos. Las transcripciones se analizaron mediante un análisis cualitativo por categorías (Echeverría, 2005). Este consiste en la distinción, separación y priorización de elementos de los discursos vertidos en entrevistas individuales (en este caso, los discursos vertidos en la clase), con el fin de establecer una serie de categorías que resulten explicativas del objeto estudiado.

El establecimiento de las categorías se realizó de forma inductiva mediante la comparación constante de los casos, partiendo de un análisis por categorías a priori, las que consistían en las primeras cinco dimensiones del modelo de entornos didácticos, permitiendo a la vez la identificación de categorías emergentes, las que correspondieron a elementos didácticos que resultaban relevantes en la comparación de los casos y que no estaban contenidas en el modelo inicial (ver tabla 15). La sexta dimensión del modelo de entornos didácticos no se consideró en el análisis debido a que esta no atendía a elementos que fueran visibles en el aula.

Se transcribieron los videos de clases de los casos elegidos. Se analizaron las distintas escenas de las clases de cada uno de los casos, valorando si estas escenas correspondían a alguna de las categorías a priori. Escenas relevantes en cuanto a elementos didácticos que no correspondían a las categorías a priori fueron codificadas bajo etiquetas nuevas revisadas de

forma constante. Una vez finalizada la codificación de todas las escenas de clases, se analizó cada una de las escenas de un mismo caso en función de una misma categoría para establecer regularidades. Para cada uno de los casos se estableció la forma en que esa categoría se expresó en las clases analizadas, los resultados se presentan de un modo comparativo bajo cada una de las categorías.

Tabla 15:

Categorías de análisis

Categorías a priori	Categorías emergentes
a) Dificultad de las tareas	f) Tratamiento del error
b) Institucionalización	g) Razonamiento matemático
c) Validación de las producciones	h) Producciones creativas de los estudiantes
d) Disposición organizativa	
e) Posibilidades de comunicación.	

4.2.2. Resultados Fase Cualitativa

La fase cualitativa abordó el cuarto objetivo específico: “describir la forma en que los entornos didácticos influyen en la creatividad matemática de los estudiantes en el aula”. Para ello se eligieron dos casos paradigmáticos que representaron entornos didácticos activos y reproductivos. El curso del profesor a quien llamaremos Aldo² ejemplifica los entornos reproductivos, con menores puntajes en las dimensiones del modelo de entornos didácticos, y el curso del profesor a quien llamaremos Pedro representa a los entornos activos, con mayores puntajes.

Los resultados se estructuraron en cuatro apartados. El primer apartado muestra una presentación general de cada caso. El segundo apartado describe cada caso a partir de las categorías a priori. El tercer apartado presenta y describe las categorías emergentes. Por último, en el cuarto apartado se describen aspectos sobre el funcionamiento sistémico de las categorías.

4.2.2.1. Presentación de los casos

El curso de Pedro

En las clases del profesor Pedro, perteneciente al grupo de *entornos didácticos activos*, se trabajó en la comparación de fracciones. Los estudiantes estuvieron sentados en grupos de 4 o 5. El profesor organizó las clases en torno al trabajo en grupos con materiales concretos (cajas fraccionarias³). Propuso preguntas sin anticipar los algoritmos de solución,

² Los nombres de los profesores y los estudiantes han sido reemplazados por seudónimos para resguardar la confidencialidad de la información.

³ Las cajas fraccionarias corresponden a un material didáctico, que consiste en una caja de base cuadrada, que en su interior contiene piezas que representan distintas particiones del cuadrado: dos mitades del cuadrado con forma de triángulos, tres rectángulos para representar los tercios, nueve cuadrados para

sino que dejó a los estudiantes formular sus propias estrategias. El desarrollo y comunicación de ideas matemáticas por parte de los estudiantes estuvo presente la mayor parte del tiempo.

En el test de creatividad matemática el curso de Pedro obtuvo puntajes con una media de 18,1 puntos (3 puntos por sobre la media del nivel socioeconómico alto), y una desviación estándar de 7,7. El puntaje máximo fue de 41 puntos y el mínimo fue de 8 puntos. Algunas de las soluciones elaboradas por los estudiantes del curso de Pedro se muestran a continuación. La figura 4 presenta soluciones de tres estudiantes al ítem 1, donde debían crear figuras de área 2 cm^2 uniendo los puntos. La mayoría usó líneas rectas presentando triángulos o cuadriláteros, algunos de ellos no cumplían la condición solicitada por lo que no fueron contados en el puntaje (como se muestra arriba a la derecha de la figura 4). Algunos estudiantes usaron 4 triángulos de medio centímetro cuadrado para formar distintas figuras. Las soluciones que aparecen arriba a la izquierda incorporan líneas curvas mediante “sacados” que agregan tanta cantidad de área a uno de los lados como quitan en el otro, manteniendo el área total y produciendo figuras con líneas curvas, sin necesidad de calcular el área de figuras complejas. Como se sugiere en los test originales, la idea que sustenta la solución resulta más relevante que la precisión de la figura. En la figura 5 se observan soluciones al ítem 3, donde los estudiantes deben sombrear o colorear partes del cuadrado de modo tal que la parte coloreada como la parte no coloreada tengan igual área. Se observan soluciones más comunes como la división del cuadrado en triángulos de igual área y otras soluciones más complejas que involucran líneas curvas.

representar los novenos, etc. Las piezas no tienen nada escrito y tienen colores según la fracción que representan.

Figura 4:
Soluciones elaboradas por el curso de Pedro al ítem 1

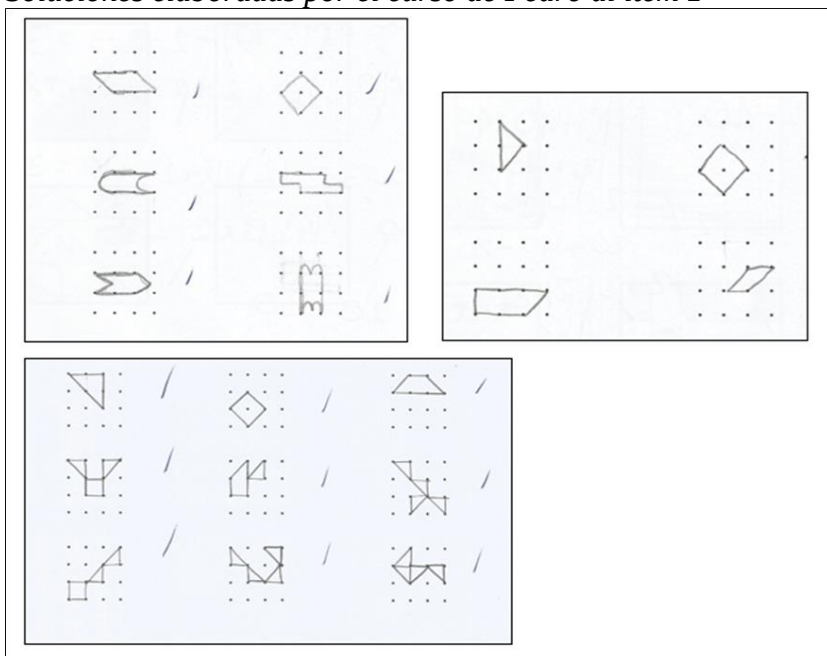
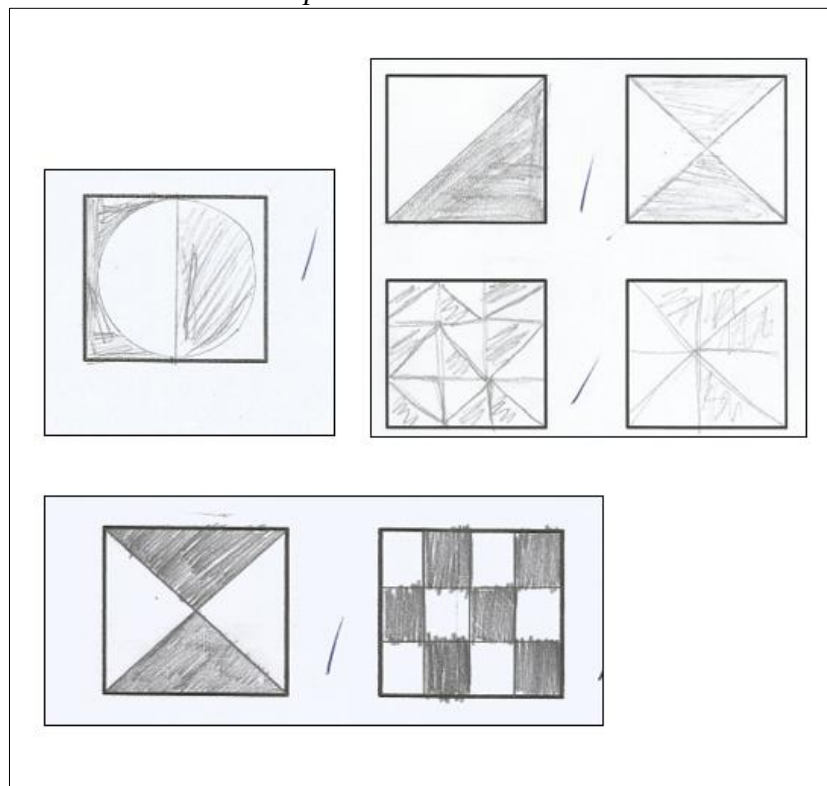


Figura 5:
Soluciones elaboradas por el curso de Pedro al ítem 3.



Los problemas creados por Pedro y caracterizados en la dimensión 6 tuvieron una alta variabilidad, (0,74), por sobre el promedio de profesores. Esta variabilidad fue mayor considerando variables numéricas (0,75), variables retóricas (0,65) y semántico-conceptuales (0,82). El detalle de los problemas se muestra en el Anexo 9.

El curso de Aldo

El profesor Aldo, perteneciente al grupo de *entornos didácticos reproductivos*, trabajó en comparación y adición de fracciones durante la primera clase, y adición y sustracción de fracciones durante la segunda clase. Los estudiantes estuvieron sentados de forma individual o de a pares, mirando hacia adelante. La estructura de ambas clases fue de exposición-ejemplos-ejercicios. Aunque se observaron algunos elementos de riqueza matemática como preguntas desafiantes, no se dio tiempo a los estudiantes para su desarrollo. El trabajo en clases fue individual, mirando al profesor y con escaso uso de ideas de los estudiantes.

En el test de creatividad matemática los alumnos de Aldo obtuvieron un puntaje promedio de 15,88 puntos (cercano a la media del nivel socioeconómico alto) con una desviación estándar de 8,1 puntos. El máximo alcanzado fue de 35 puntos y el mínimo fue de 7 puntos. Algunos ejemplos de las soluciones elaboradas en el test en el curso de Aldo se muestran en las figuras 6 y 7. En el ítem 1 se observan respuestas triviales en la parte de arriba a la derecha de la figura 6 (el mismo rectángulo del ejemplo rotado), y otro trabajo con distintas soluciones usando triángulos, cuadriláteros y sus combinaciones. En el ítem 3 puede observarse algunos ejemplos de soluciones en que los estudiantes crearon distintos diseños usando líneas rectas (Figura 7).

Figura 6:
Soluciones elaboradas el curso de Aldo al ítem 1

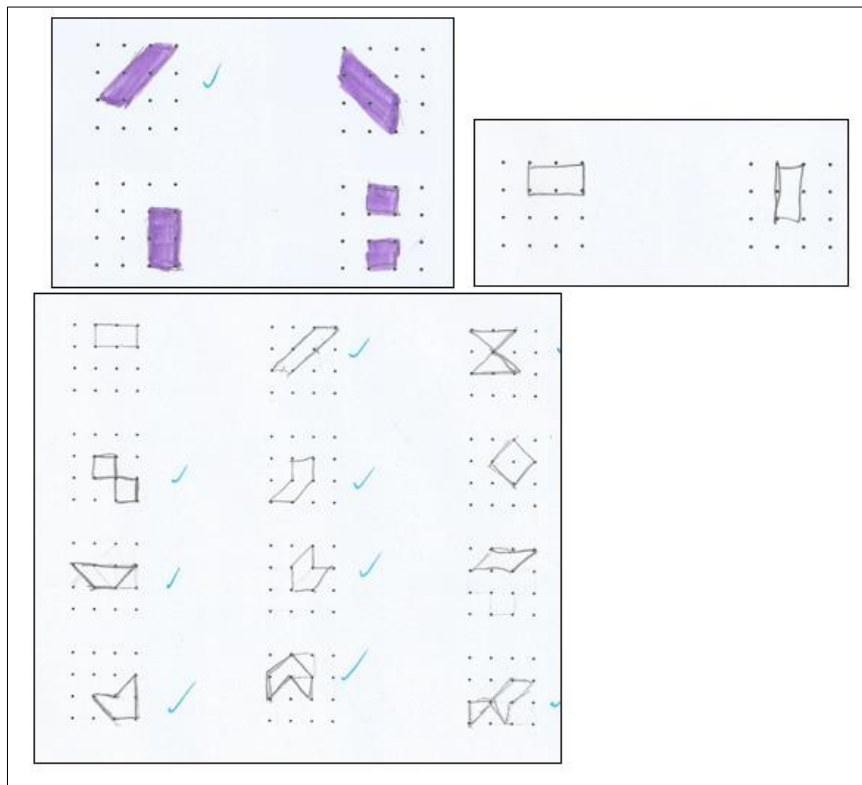
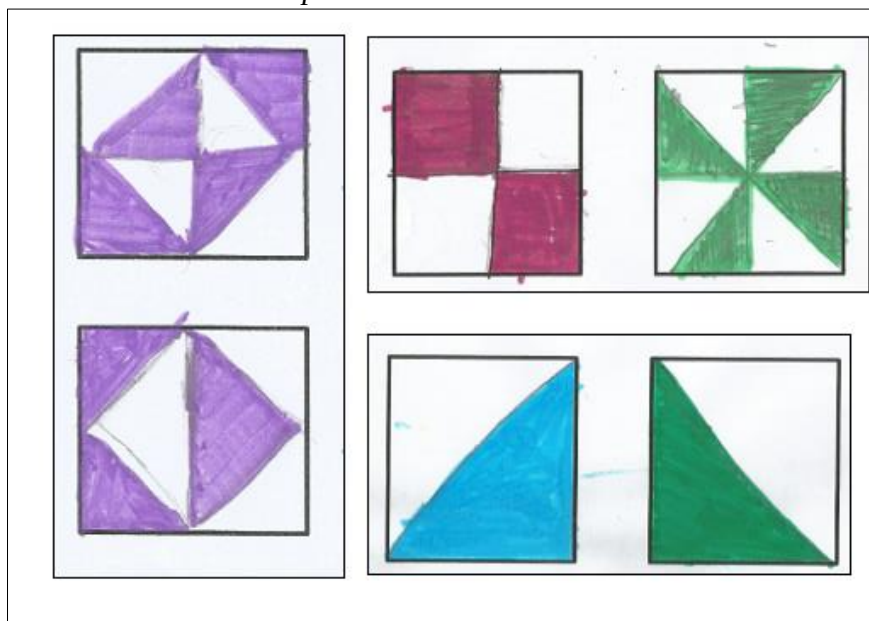


Figura 7:
Soluciones elaboradas por el curso de Aldo al ítem 3



Los problemas creados por Aldo y caracterizados en la dimensión 6 tuvieron, al igual que en el caso de Pedro, una alta variabilidad, (0,72), por sobre el promedio de profesores. La variabilidad fue mayor al promedio obtenido por los profesores de la muestra en las variables numéricas (0,75) y semántico-conceptuales (0,87), y menor al promedio de la muestra en cuanto a las variables retóricas (0,54). El detalle de los problemas se muestra en el Anexo 9.

4.2.2.2. Categorías a priori

a) Dificultad de las tareas

Esta categoría registró los problemas, ejercicios o preguntas realizadas por el profesor, analizando si estas requerían de la aplicación de algoritmos previamente enseñados o propiciaban la reflexión, la conexión de contenidos o la elaboración de estrategias propias.

En las clases del profesor Pedro las tareas presentaron distintos tipos de desafíos para los estudiantes. La principal tarea consistió en demostrar visualmente, usando el material concreto, si dos fracciones dadas por el profesor eran iguales o una era mayor que otra. A lo largo de la clase el profesor eligió fracciones que fueron aumentando los niveles de dificultad. Si bien en un principio la comparación visual era sencilla y solo requería que los estudiantes eligieran las piezas correctas, en las tareas posteriores la comparación de las fracciones requirió una serie de estrategias como, por ejemplo, el reemplazo de la pieza que representaba la fracción un cuarto por dos piezas que representaban un octavo. Las últimas preguntas que el profesor planteó apuntaron a que los estudiantes identificaran relaciones de equivalencia prescindiendo del material concreto.

Un aspecto relevante fue la forma en que el profesor gestionó el desarrollo de las tareas. Cada vez que el profesor daba una tarea o problema los grupos tenían tiempo

suficiente para resolver. Luego, las tareas se discutían colectivamente una vez que todos los grupos habían llegado a algún resultado. Además, los grupos de trabajo debían discutir sobre si estaban de acuerdo con los resultados dados por algún miembro del grupo. La siguiente escena ejemplifica el tipo de tareas:

El profesor escribe en la pizarra “Comparar fracciones. Emplear el material para demostrar si una fracción es ‘igual’, ‘mayor que’ o ‘menor que’ otra”.

Profesor: Entonces vamos a hacer lo siguiente, les voy a escribir en la pizarra un par de fracciones, así como: $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ (escribe estos números). La idea es que ustedes sin hacer ningún cálculo, sin papel, así como restar, sumar, o lo que sea, puedan... (remarca la palabra demostrar) ¿Qué es lo que hay que hacer específicamente?

Alumnos: Demostrar

Profesor: Ya, hay que demostrar, ¿cierto?, ¿Demostrar con palabras? ¿Sofía?

Sofía: No, demostrar con representación.

Profesor: Perfecto, con qué tipo de representación, Vale.

Vale: ¿Pictórica?

Profesor: Ya, se parece a la pictórica, pero es más bien... (toca el material)

Alumna: Concreta

Profesor: Ya, concreta, ¿cierto? Pero es como, lo mismo, es como si fuera el dibujo. Ya, hagamos una prueba, con esto (encierra en un recuadro el $\frac{1}{2}$ y el $\frac{2}{3}$). Todo el grupo tiene que estar de acuerdo y me tiene que decir si $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, uno es mayor que otro, uno es menor que otro o los dos son iguales, pero me tiene que demostrar.

En la clase del profesor Aldo las tareas consistieron en aplicar dos métodos distintos para la adición de fracciones. En cada caso, el método fue explicado paso a paso antes de presentar los ejercicios, por lo que las tareas consistieron en recordar los pasos a seguir y aplicar correctamente los métodos antes enseñados. En ciertos momentos de la clase hubo preguntas desafiantes, por ejemplo, “¿cómo se puede sumar dos fracciones cuando el denominador es distinto?”. Sin embargo, fue el profesor quien respondió la pregunta de forma inmediata y los estudiantes no tuvieron tiempo para pensar en por qué el método de sumar

los numeradores no era suficiente. La siguiente escena ejemplifica el tipo de tarea que fue más frecuente en la clase:

El profesor ha enseñado previamente un segundo método para la suma de fracciones que consiste amplificar cada sumando por el denominador del otro sumando para obtener denominadores iguales.

Profesor: A ver, veamos ejemplo aplicando ahora el método 2. (Escribe en la pizarra $1/3 + 2/5$). Resuelvan eso.

b) Institucionalización

Esta categoría capturó la forma en que se daban a conocer conceptos o procedimientos matemáticos en la clase, analizando si estos conceptos surgían como una construcción de los estudiantes formalizada por el profesor o si eran expuestos de forma directa por el profesor.

En las clases de Pedro hubo varios momentos de institucionalización, en todos ellos la formalización se realizó conectando aspectos de la matemática con las producciones de los estudiantes. Si bien, no llegaron a establecer de manera formal las reglas para que dos fracciones sean iguales (reglas de amplificación y simplificación), se aproximan a ellas y, además, ocurrieron discusiones colectivas donde se analizó el concepto de fracción y lo que implicaba que dos fracciones sean iguales, así como la utilidad de los materiales o de otras representaciones.

Al final de la segunda clase, una vez que los estudiantes han comparado de forma concreta distintas fracciones. En este momento de la clase, los estudiantes acaban de concluir que $2/3=4/6$ usando el material.

Profesor: Pregunta. Si no tuviera el material, así como en concreto, ¿puedo saber yo que $2/3$ es igual a $4/6$?

Micaela: Sí, porque dos es la mitad de cuatro y la mitad de 6 sería 3.

Profesor: Ya. Seba, les voy a quitar el material (profesor llama la atención de unos niños que están jugando con el material, y se los retira de la mesa) Ya. Perdón. La Mikaela dijo lo siguiente. Porque si el 4 lo divido en 2, me da 2 y si el 6 lo divido en 3, dijiste, también me da 2. Ya. ¿Están de acuerdo o no?

Alumnos: Siiiiii

Profesor: ¿Sofi?

Sofi: Es como parecido pero diferente.

Vicente: Lo contrario

Profesor: ¿Cómo sería lo contrario, Vicente?

Vicente: ¿Dividiendo?

Profesor: No po. La Micaela dividió 4 y dividió 6.

Vicente: ¡Ah! ¡multiplicando!

Profesor: Multiplicando, ¿cierto? Antonia, cómo sería esa multiplicación entonces. Más fuerte.

Antonia: (Habla muy bajito, no se escucha en la grabación)

Profesor: La Antonia dice, de aquí puedo convertir esta fracción ($4/6$) en esta ($2/3$) dividiendo. Ya. La Sofia y el Vicente me dicen que puedo hacer lo mismo al revés. Multiplicando. Por cuánto.

Antonia: Por 2

Profesor: Por 2 ¿cierto? Eso. Por lo tanto, ahora, ya que ese grupo no tiene material. Si yo les pidiera que todos me dijeran (escribe $3/9$ y $1/3$ en la pizarra) cual es mayor. ¿Pueden hacerlo sin el material?

Alumnos: Sí

Joaquín: $1/3$ es mayor

Profesor: ¿Cómo sabes?

Joaquín: Porque... (toma el material)

Profesor: No, no, no, sin el material (risas de todos)

Joaquín: Porque es más chico. Es mayor el... (Hace gestos con las manos), el denominador es mayor.

Profesor: ¿El denominador es mayor? Es menor de hecho, pero son más grandes las partes que los novenos. ¿Ya? ¿Gabriel?

Gabriel: Son iguales porque el 3 es un tercio de 9

Profesor: Ya, ojo, el Gabriel está aludiendo al concepto de fracción. Está haciendo la relación entre el numerador y el denominador. ¿sí o no? El Gabriel pensó lo siguiente. El uno sumado 3 veces es 3. El 3 sumado 3 veces es 9. Por lo tanto, la relación entre esos dos es la misma relación. O sea, dice el Gabriel, son iguales. ¿están de acuerdo? ¿Amaro? ¿Qué pensaron ustedes?

Amaro: Que es igual

Profesor: ¿Pero lo mismo de otra manera?, ¿llegaron a conclusiones de otra forma?

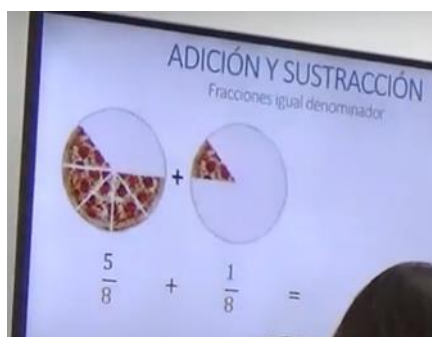
Josefina:	Yo lo dibujé (profesor le ofrece plumón, niña sale a la pizarra, dibuja cuadrado dividido en 3x3) si este es el entero... los novenos serían estos. Y tres novenos sería un tercio. Y ese tercio, sería lo mismo que $\frac{3}{9}$.
Arturo:	Pero dibujó los materiales.
Profesor:	Súper. Gracias. Arturo ¿opinión?
Arturo:	Mi opinión es que está bien.
Profesor:	Pero tú dijiste algo.
Arturo:	Que eso es un material
Profesor:	Ya. La Jose, si bien es cierto que la Jose no tiene en sus manos los tercios y los novenos para hacer eso, pero está haciendo la representación pictórica del material. Dale. Por lo tanto, está llegando a la conclusión correcta, me parece excelente. Pero no está cumpliendo la condición que pedí, que es sin el material, sin el dibujo en el fondo. Solamente eso es lo que decía Arturo.
Arturo:	Que en caso de que no tengamos materiales y solo tengamos el cuaderno, tenemos cuaderno, pero cuadriculado, dibujamos un cuadrado, yo lo tenía y conté los cuadrados. Cantidad de cuadrados.
Profesor:	Sí, sería una buena forma. Qué bueno que lo mencionaste Arturo. Porque vamos a hacer eso enseguida.

En esta escena puede observarse que, si bien no se llegó a establecer de manera formal la amplificación y simplificación, los estudiantes habían comenzado a identificar algunas de sus reglas. Por otro lado, establecieron varias conclusiones sobre el concepto de fracción, por ejemplo, lograron visualizar y comprender el sentido de la igualdad de $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{9}$ recurriendo a una representación. Esta escena ocurrió al final de la clase, por lo que es posible que posteriormente los estudiantes hayan sido capaces de establecer estas reglas.

En la clase del profesor Aldo la presentación de los contenidos ocurrió al principio de cada clase observada. Esta presentación se basó principalmente en enunciar métodos para realizar distintas operaciones con fracciones: amplificar, simplificar, sumar, restar. Pese a que parecía haber una intención de involucrar a los estudiantes realizando preguntas antes de realizar los pasos del algoritmo, estas preguntas resultaban triviales y no involucraban los conceptos de fondo. En un comienzo el profesor explicó la forma en que se puede amplificar la fracción $\frac{1}{2}$: “multiplicando arriba y abajo por el mismo número”, acompañó esta

explicación con imágenes de pizzas divididas en distintas partes iguales y realizó preguntas del estilo “si me como $\frac{1}{2}$ y me como $\frac{2}{4}$ ¿me comí lo mismo?”. El profesor llamó “familias de fracciones” a las fracciones equivalentes y las presentó poniendo flechas en lugar del signo igual (por ejemplo, $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{3}{6}$). Cuando el profesor pidió hacer la familia de fracciones de $\frac{2}{3}$ varios estudiantes se mostraron confundidos, pensando que para obtener esa familia debían multiplicar en orden (por 2, por 3, por 4), otros alumnos pensaron que las familias de fracciones son las que tenían en el numerador la mitad del denominador, y varios estudiantes señalaron no entender para qué multiplicar “arriba y abajo” por el mismo número. El profesor continuó explicando dos métodos distintos para la adición de fracciones. La siguiente escena ejemplifica esta categoría:

- Profesor: Necesito que recordemos estas cosas toda esta clase, bueno y para siempre, pero sobre todo esta clase porque nos va a ser útil para lo que vamos a aprender ahora. A ver, dice: Adición y sustracción con igual denominador (aparece proyectada una dispositiva)
Título, título, todos a escribir. Vamos, escriba, escriba. No te voy a esperar Franco. (uno de los alumnos que no entendía la amplificación, señala algo al profesor que no se escucha)
- Profesor: Ya yo te lo tengo que explicar, te lo voy a explicar sí o sí en otro momento, pero acá necesito que pongas mucha atención, porque recuerde que será un recordatorio de todo lo que ya aprendimos.
(En la diapositiva aparece la siguiente imagen)



Profesor:	Ah, qué bonito. veamos. pizzas yo sé que es desayuno, pero a mí me encanta la piza para el desayuno. Si tengo cinco octavos, ya, tengo cinco. No, antes. Si tengo una pizza y la dividido en cuántos pedazos
Alumno:	¡en 8 partes!
Profesor:	8 partes. Después tengo, tengo otra pizza de otro sabor, bueno en estas fotos son del mismo sabor, y que también la divido en ocho partes, pero de la primera pizza me como 5 y de la segunda pizza me como un pedazo.
Alumna:	No profe, se comió 7 y de la otra 3
Profesor:	¡Ah! ustedes lo quieren hacer al revés, ya. Entonces déjenme cambiar la frase. Yo no me comí 5 pedazos, a mí me sobraron 5 pedazos, y de la otra piza me sobró 1 pedazo. ¿Cuántos pedazos me sobraron?
Martín:	6
Profesor:	Me sobran 6 pedazos de $\frac{1}{8}$ de pizza. O sea, $\frac{6}{8}$. Y lo que hacemos es lo que dijo martín. Miren, mantengo el denominador y sumó los numeradores, en palabras más sencillas, mantengo el número de abajo y sumo los de arriba. ¿por qué debo mantener los números de abajo?
Alumno:	Porque se repiten
Profesor:	Porque ambas pizzas están divididas en...
Alumna:	En lo mismo
Profesor:	Lo mismo, por tanto, son el mismo denominador. Insisto, solo puedo sumar de esta forma cuando tengo igual denominador.

En esta escena se puede observar que los estudiantes participaron respondiendo a las preguntas, sin embargo, estas preguntas abordaron cuestiones triviales y no los conceptos centrales del tema tratado. Por ejemplo, la pregunta “¿cuántos pedazos me sobraron?” podía ser resuelta usando números naturales, cuestión obvia para niños de 5° básico, sin incorporar el significado del denominador. La regla final fue enunciada por el profesor “insisto, solo puedo sumar de esta forma cuando tengo igual denominador” y los estudiantes no tuvieron la posibilidad de llegar a establecer esa conclusión por ellos mismos.

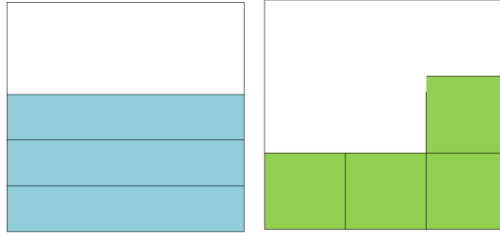
c) Validación de las producciones

Esta categoría capturó la forma en que los profesores reaccionaron a las producciones de los estudiantes. Estas producciones abarcan todo lo que realizan los estudiantes en la clase en relación con la matemática, ya sean preguntas, soluciones, comentarios, etc. Si bien, en el

modelo de entornos didácticos esta dimensión contempla los errores como una producción del estudiante y observa el modo en que reacciona el profesor, para efectos del análisis cualitativo se ha considerado pertinente analizar la reacción a los errores como una categoría aparte (ver categoría emergente, f). Por esta razón, en esta categoría nos centramos más bien en las producciones como ideas, preguntas, comentarios o soluciones que no involucran errores. En coherencia con el marco teórico empleado, se busca apreciar dónde se sitúa la responsabilidad del aprendizaje, si se propicia una actitud activa de los estudiantes en cuanto a la construcción de conocimientos, o es más bien es el profesor quien se encarga de aprobar, desaprobado o responder de manera directa.

En la clase de Pedro, el profesor respondió de distintas formas a las producciones de los estudiantes, en general, esta respuesta se caracterizó por no validar de manera directa, impulsando al estudiante a justificar, a precisar o a generalizar sus producciones. Cuando los estudiantes daban una respuesta a una tarea planteada, el profesor pidió justificar sus ideas, y validó solo cuando la justificación resultó consistente. Además, dado que los grupos debían establecer consensos o discrepancias, el profesor pedía a todos los integrantes mencionar si estaban en acuerdo o en desacuerdo con una idea, y explicar por qué. Por otro lado, el profesor no dio respuestas ni mostró procedimientos para responder a los problemas sino hasta que los estudiantes llegaron a plantear algunas estrategias exitosas. La siguiente escena ejemplifica la respuesta del profesor ante la discrepancia en las soluciones de un grupo:

El profesor se acerca a un grupo que intenta comparar $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{9}$ utilizando las cajas fraccionarias. Al representar estas fracciones sobreponen en la caja fraccionarias algo como lo que muestra el siguiente esquema (piezas celestes a la izquierda y verdes a la derecha):



Profesor: ¿Qué pensaron?

Arturo: Es mayor el celeste.

Profesor: ¿Sigue siendo mayor el celeste?

Carlos: Sí, pero mire, es que con Arturo seguimos pensando otra cosa. Nosotros dos pensamos que es mayor este (apunta piezas celestes) pero ellos creen que es mayor este (apunta piezas verdes).

Profesor: Ya, a ver, expliquemos, probemos.

Arturo: Para mí, este lado es igual a los sobrantes de este, y si lo movemos este lado para este, es mayor el celeste.

Profesor: ¿Qué opinas Julián? ¿Max?

Carlos: ¿Qué cree usted?

Profesor: No importa lo que yo creo, importa lo que ustedes creen. Max, ¿qué crees tú? ¿te convence la explicación de Arturo? Que en el fondo este pedacito que está aquí está como aquí y aquí dos veces (apuntando piezas verdes) así que uno, dos y todavía sobra del celeste. Eso dijiste tú (Arturo asiente) ¿Qué crees Max?

Max: Que esta calza

Profesor: Y tú crees que esa parte calza acá y acá. Ya, ¿Julián?

Julián: Yo igual creo que calza

Profesor: Ya, perfecto. Me parece interesante ¿No les parece interesante? Pero no les voy a decir la respuesta, por si acaso.

Para responder la duda de este grupo, resultaba necesario realizar un reemplazo de piezas por otras equivalentes, sin embargo, en este momento de la clase esta estrategia no había surgido aún. Más adelante se verá que el profesor emplea el desacuerdo de este grupo de estudiantes como un argumento de que el material no es suficiente para determinar de forma categórica qué fracción es mayor, siendo necesario otro tipo de reglas:

En el contexto de una discusión con toda la clase donde comparten sus conclusiones respecto a qué fracción es mayor entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$.

Profesor: Entonces, el grupo de ustedes no llegó a un consenso, ¿cierto? Todavía estaban discutiendo cuál era mayor. El Arturo decía lo que varios grupos decían así que les voy a robar un poquito la idea. Decían que estos pedazos que no están cubiertos por los celestes, que no tienen abajo superficie celeste, si los recortáramos y lo pusiéramos aquí alcanzaríamos a cubrir esa parte y un poquito, y todavía sobraría superficie celeste.

Carla: Entonces la conclusión sería que sobra más porque la otra parte que, es más delgada, entonces es más el celeste porque está más afuera.

Profesor: Ok, super.

Angela: La conclusión es que $\frac{3}{5}$ es mayor

Profesor: Claro, $\frac{3}{5}$ era mayor que este. Pero pregunta, volvamos a la instrucción inicial, que tenemos que demostrar con el material ¿Se hace fácil demostrar con el material para este caso?

Jorge: No tanto

Profesor: No tanto. Tenemos que empezar a usar un poquito la imaginación, o sea como “imagínate que recortamos este pedazo” ¿cierto? Ya no es tan fácil como demostrarlo en este caso. Demostrar que aquí era más celeste que verde era fácil (mostrando el caso anterior, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{9}$). Demostrar que aquí era más celeste que verde no era tan fácil.

Alonso: Que uno para calcularlo deberíamos ocupar una regla.

Profesor: Así como medir. Perfecto me parece super bien, podría haber sido. Hagamos la última prueba. Pero quiero que quede claro que el material, para este caso, como que no nos sirvió mucho. Si hubiese servido mucho, ese grupo no hubiese tenido la discusión que tuvo.

Otras formas en que el profesor Pedro gestionó las ideas de los estudiantes, fue sugiriendo usar estrategias planteadas por otros estudiantes. Si bien, el profesor no mostró directamente qué pasos debían realizar, hizo explícito que la respuesta dada por el grupo era insuficiente y propuso emplear lo que otros compañeros habían usado de forma más efectiva. La siguiente escena corresponde a la clase 2, una vez que varios grupos ya habían empleado la estrategia de reemplazar piezas equivalentes a conveniencia, para mostrar qué fracción era mayor. Estas estrategias habían sido discutidas con toda la clase.

El profesor llega a un grupo de estudiantes a monitorear el trabajo, los estudiantes comparan 3 fracciones: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$

Carla: Mayor $\frac{3}{4}$ (lo dice antes que el profesor pregunte nada)

Profesor: ¿Por qué?

Carla: Porque estos dos son iguales.

Martina: $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$

Profesor: ¿Cómo saben que son iguales?

Carla: Porque acá... (apunta caja fraccionaria)

Profesor: ¿Podemos verlo?

(Alumnas colocan las piezas $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$)

Profesor: Ya, perfecto. Me queda claro ¿Y cómo saben que $\frac{3}{4}$ es mayor?

Romina: Lo vimos así, al ojo no más.

Profesor: Ya, pero ayer vimos una estrategia para no hacerlo solamente al ojo.

(alumnos mueven las piezas)

Profesor: ¿Qué tiene que ver esta ficha?

Juan: Es solo para medir

(Ponen fichas sobre otras y apuntan la caja, han formado $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ pero no es evidente qué fracción es mayor).

Profesor: Pero todavía no me dicen nada.

Carla: Por el espacio, acá sobra espacio, pero esta sobra acá. Con esta pieza solo medimos el espacio.

Profesor: Ya. Entiendo lo que me dicen. Pero no me lo están demostrando, con el material. Quiero ver que es mayor, no suponer que es mayor.

En la clase del profesor Aldo, varios estudiantes opinaban al mismo tiempo y fue frecuente que algunas de sus ideas o preguntas quedaran sin respuesta. En otras ocasiones el profesor incorporó a la clase algunas de las preguntas o ideas de los estudiantes. La forma de gestionar estas producciones fue en todos los casos de manera directa. Es decir, el profesor aprobó comentarios declarando explícitamente que estaban correctos, sin pedir justificación, o respondió preguntas de los estudiantes, sin plantear la pregunta al resto de la clase ni realizar contrapreguntas. La siguiente escena ejemplifica esta categoría:

El profesor explica el procedimiento para sumar fracciones de distinto denominador, buscando fracciones equivalentes. Ha realizado el ejemplo sumando $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

Juan: Tengo una pregunta. qué pasa si en vez de $\frac{2}{5}$ fuera $\frac{2}{6}$

Profesor: Tengo que seguir mucho más allá ¡ah, no! llegaría a un momento en que tendría... ¿lo hacemos? pero bien, lo voy a hacer mega rápido, así que no lo escriban, va a ver un momento en que voy a tener... Sí, $\frac{2}{6}$ (escribe en la pizarra $\frac{2}{6} \rightarrow \frac{8}{24}$ y $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{6}{24}$) Y ahí tengo el mismo denominador, ¿por cuánto amplifique esto?

Lucy: Por 6

Natalia: $\frac{14}{24}$

Profesor: Y ahí yo podría sumar eso ¿cómo? (pizarra $\frac{8}{24} + \frac{6}{24}$) y luego... alguien lo había dicho. ¿Natalia? $\frac{14}{24}$. Hermoso. Pero eso yo lo puedo simplificar

Jairo: Por 2

Profesor: De hecho, ahora que veo los números yo lo podría haber hecho más sencillo.

Natalia: $\frac{7}{12}$

Jairo: Se puede simplificar más

Profesor: No, no puedo más

Luciana: Pero usted podría haber hecho por dos y por tres

Profesor: ¡Bien! ¡exacto!

Arturo: No entendí, no, no, no, qué pasó ahí.

Profesor: Ya, sigamos.

d) Posibilidades de comunicación

Esta categoría captura la forma en que ocurre la comunicación en la sala de clases y si los estudiantes tienen la posibilidad de interactuar con sus compañeros o profesor. Además, se aprecia la calidad de esa comunicación en cuanto a si esta es efectiva, es decir, si los estudiantes pueden comunicar sus ideas o sus dudas, y si estas son escuchadas por el resto de los actores de la clase, y cómo el profesor gestiona esta comunicación.

En la clase de Pedro se distinguieron dos momentos diferentes, el trabajo en grupos pequeños y las discusiones con toda la clase. En los grupos pequeños los estudiantes tenían la posibilidad de comunicarse con el resto de estudiantes de su grupo y discutir para llegar a acuerdos. Más que la posibilidad de comunicarse, como una opción que pueda elegirse libremente, esta era la dinámica de la clase y era difícil que un estudiante pudiera estar en el

aula sin participar activamente de la comunicación. En los momentos de discusión grupal, que ocurrían siempre después de que los grupos habían llegado a alguna conclusión, el profesor moderaba las discusiones. En estas discusiones grupales los estudiantes casi siempre levantaron la mano para opinar. La mayoría de los estudiantes estaba atento a la discusión, en los momentos en que algunos alumnos se distrajeran o comenzaron a jugar con el material, el profesor les pidió prestar atención. En varias ocasiones, cuando un estudiante hizo un comentario, el profesor preguntó a otros si estaban de acuerdo o no y por qué, o hizo que otros estudiantes explicaran lo que había dicho un alumno. Estas acciones propiciaron el que los estudiantes opinaran, se escucharan, y pensaran sobre las producciones de otro no solo en el trabajo en grupos pequeños, sino que también en las conversaciones con todo el curso. La siguiente escena ejemplifica estos aspectos.

Los estudiantes han llegado a determinar que un medio es menor que dos tercios y el profesor ha escrito en la pizarra $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. A continuación, se da una discusión sobre la lectura de las notaciones.

Profesor: Bruno, cuando tú comienzas a leer algo comienzas de izquierda a derecha, ¿ya? Si partimos de izquierda a derecha leyendo esto ¿qué dice?

Bruno: ¿Un medio y dos tercios?

Profesor: ¿Esto dice “y”? (indica con el dedo el signo “menor que”) ¿Este signo significa “y”? (otro alumno levanta la mano) baja la mano, el Bruno me va a contestar

Bruno: Que $\frac{2}{3}$ es mayor que un medio

Profesor: ¿ya? Mmmm... Amaro ¿estás de acuerdo?

Amaro: Sí, yo iba a decir eso.

Profesor: Ya. ¿Julián?

Julián: Yo digo que no estoy de acuerdo porque ahí dice, lo que él dice que $\frac{2}{3}$ es mayor que un medio está al revés de lo que dice ahí.

Profesor: Bruno ¿lo escuchaste? ¿Qué dijo el Julián?

Bruno: ¡Ah! no, no escuché

Profesor: Julián, repítelo por fa

Julián: Que yo digo que está mal porque ... que lo que está ahí no es ... es que está al revés porque el Bruno dijo $\frac{2}{3}$ es mayor que un medio.

Profesor: Lo que tú dijiste fue esto (Escribe en la pizarra $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$) $\frac{2}{3}$ es mayor que un medio, en orden me refiero, ¿sí? De nuevo, Bruno, lo que está acá, qué dice.

Bruno:	$1/2$ es menor que $2/3$
Profesor:	¿Ahora estamos de acuerdo?
Alumnos:	Siiii
Profesor:	Vale ¿Es la misma información?
Martina:	Es casi lo mismo.
Profesor:	¿Es casi lo mismo? ¿por qué es diferente?
Martina:	Es diferente porque te dice mayor y menor, entonces la información lo que te está diciendo es lo mismo, en el fondo que uno es mayor que el otro, pero se escribe de forma distinta, a eso me refiero.
Profesor:	Vale, pero que se escriba algo de forma distinta ¿significa que sea un poquito distinto?
Alumnos:	mmmmm
Profesor:	Tenemos dudas ahí.

En la clase de Aldo, el profesor estuvo en frente de la clase la mayor parte del tiempo, realizando preguntas a los estudiantes para que estos opinaran. Los estudiantes se mostraron participativos respondiendo las preguntas del profesor y realizando preguntas propias. Para opinar o participar en la clase los estudiantes no levantaban la mano, esto hizo que en algunos momentos varios estudiantes hablaran al mismo tiempo sin distinguirse claramente un comentario de otro y sin poder dar seguimiento a las ideas. En general, el profesor incorporó las ideas que respondían a sus preguntas de forma acertada. En algunos momentos los alumnos plantearon dudas que no fueran abordadas.

Los estudiantes no realizaron trabajo en grupo ni se les pidió opinar sobre la validez de las ideas de otros estudiantes. La comunicación ocurrió principalmente entre el profesor y los estudiantes sin haber espacios en que estos pudieran discutir entre pares.

(El profesor muestra un método para sumar fracciones de distinto denominador que consiste en hacer familias de fracciones para cada término y luego, elegir aquellas con igual denominador).

Profesor: Entonces acá tengo familias de fracciones. dos quintos y cuatro décimos, que más, a ver, Lucas.
Lucas: No se puede
Alumna: Sí se puede
Alumno: Entonces explícame cómo
(muchos niños hablan a la vez)
Profesor: Lucas
Lucas: $\frac{6}{5}$
Profesor: (profesor escribe $\frac{6}{5}$)
Alumno: Pero profesor esa no es la mitad, o sea...
Alumna: ¡6 quinceavos!
Alumno: Por 4. Ya. Profesor, es que el 4, el siguiente va a ser 8. Pero el de arriba es 1 y el siguiente es 2, como sé, no lo entiendo, 2 no es la mitad de 8
Profesor: ¿Por cuánto la amplifiqué? ¿Belén, por cuanto lo amplifiqué para obtener eso? (escribe) les puse la respuesta (profesor borra) ¿por cuánto la amplifiqué?
Alumna: Por 2
Profesor: Ya, ahí la amplifique por 2 para llegar ahí
Alumno: Después por 5, por 6, por 7, por 8

e) Disposición organizativa

Esta categoría observó la forma en que el profesor organizaba los puestos de los estudiantes. En la clase de Pedro los estudiantes estuvieron sentados en grupos pequeños de 3, 4 o 5 estudiantes. Esta disposición se mantuvo constante en las dos clases observadas. En la clase de Aldo los estudiantes estaban sentados mirando hacia adelante en las dos clases observadas⁴.

⁴ Cabe recordar que la categoría “disposición organizativa” se quitó como variable del modelo en la fase cuantitativa, ya que no guardaba relación con las otras variables consideradas. Asimismo la información que arroja en esta fase no involucra directamente una relación con las otras categorías exploradas.

4.2.2.3. Categorías emergentes

A continuación, se presentan las categorías que emergieron del análisis. Estas categorías fueron construidas a partir de aspectos didácticos relevantes que no estaban contenidos por las categorías principales del modelo de Entornos didácticos (categorías g y h), o bien a aspectos que fue necesario separar para reportar resultados con mayor detalle (categoría f). Corresponden a elementos que aportan información relevante para analizar los casos estudiados y que son determinados de forma interpretativa en el proceso de análisis. Estos elementos son estrictamente didácticos, es decir, se remiten a la relación de los estudiantes y el profesor con la matemática.

f) Tratamiento del error

Esta categoría registró la forma en que los profesores gestionaron la clase cuando los estudiantes cometieron errores matemáticos o manifestaron no comprender algún algoritmo o concepto específico. Como se mencionó antes, esta categoría corresponde a una especificación de la categoría “validación de las producciones”, ya que el modelo de análisis de entornos didácticos considera un error como un tipo de producción del estudiante. Sin embargo, para efectos de un análisis detallado y en consideración de la literatura que releva la forma en que los profesores conciben y trabajan con los errores en matemática (por ejemplo, ver Liping Ma; 2010; Rico, 2005 y Brousseau, 1987) se decidió considerar esta como una categoría emergente.

En las clases del profesor Pedro hubo pocas escenas donde los estudiantes cometieran errores o se mostraran confundidos respecto a un concepto o procedimiento. Dentro de los errores registrados, uno de los más recurrentes consistió en la dificultad para identificar el

denominador de la fracción, por ejemplo, para representar $\frac{5}{9}$ los estudiantes debían poner 5 piezas de $\frac{1}{9}$ en la caja fraccionaria. Dado que las piezas no contienen escrita la fracción que representa, en algunas ocasiones, los estudiantes no eligieron bien las piezas. En estos casos el profesor realizó preguntas a los estudiantes para que en conjunto identificaran el error y lo corrigieran. La siguiente escena ejemplifica este error:

Profesor:	Ya terminaron, ¿a qué conclusión llegaron?
Matías:	$\frac{4}{5}$ son mayor que $\frac{5}{9}$. (niños han usado octavos en lugar de novenos, por lo que la caja fraccionaria en realidad representa $\frac{5}{8}$)
Profesor:	Ya, espérate, ¿ustedes dicen que estos son novenos? ¿O sea que 9 de estos forman el entero? ¿Veamos? (profesor pone piezas sobre el entero) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (no alcanza a poner la novena pieza)
Niños:	¡Aaahhh! (Los niños buscan otras piezas).
Profesor:	¿Cuáles son los novenos?
Jorge:	No sé
Camila:	Yo les había dicho antes que esos no eran. Son octavos
Profesor:	Cómo no sé. Bien Camila, son los octavos. búsqwenlos, busquen, están haciendo que la responsabilidad sea de los otros. (Los niños intentan calzar las piezas, hasta que prueban con las piezas correctas, los verdes.)
Profesor:	¿Son los novenos esos? ¿Los verdes?
Niños:	Siiii (los niños, representan correctamente $\frac{5}{9}$ usando las piezas verdes)
Profesor:	Ya, estos sí son los novenos, ya, bien.

En general este tipo de error ocurrió en pocas ocasiones. Fue más frecuente ver la forma en que el profesor moderaba producciones que, si bien no contenían errores, podían ser más precisas, o requerían mayor reflexión para cumplir en términos estrictos con el enunciado. En estos casos el profesor, en conjunto con los estudiantes, logró evidenciar que si bien el razonamiento era correcto podía ser más preciso. La siguiente escena ejemplifica este tipo de intervenciones:

Momento al comienzo de la primera clase. Ha pasado poco tiempo desde que se da la tarea de comparar $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ usando el material. El profesor se acerca a un grupo de estudiantes.

Profesor: Ya, ¿qué pensaron ustedes?

Alonso: Que dos tercios es mayor que un medio.

Profesor: ¿Por qué?

Alonso: Porque se pasa de la mitad de tres.

Profesor: ¿Cómo?

Alonso: Que la mitad de tres es uno coma algo...

Profesor: Max, ¿el Alonso está haciendo lo que les pedí?

Max: No porque está... ¿yo creo que le faltó algo?

Profesor: Yo creo que no le faltó nada, o sea su explicación estuvo perfecta.

Julián: Yo creo que...

Profesor: escuchen a Julián

Julián: Porque hizo un cálculo.

Profesor: El Alonso hizo un cálculo, ¿verdad? A lo mejor no lo escribió en papel, pero lo tenía en la mente, dijo que la mitad de 3 es 1 coma algo y aquí tengo 2, ¿verdad? Pero yo necesito que ustedes me demuestren utilizando el material.

En la clase del profesor Aldo fue común que varios estudiantes realizaran intervenciones al mismo tiempo, por lo que cuando el profesor hacía una pregunta a toda la clase se escuchaban varias respuestas, algunas de ellas erradas. En varias ocasiones ocurrió que esos errores, en forma de “lluvia de respuestas” no fueron corregidos ni tratados de ninguna forma. En otros momentos, cuando el profesor pasaba por los puestos de los estudiantes revisando si habían logrado realizar los ejercicios en sus cuadernos, los errores fueron corregidos de forma directa, señalando los pasos correctos que debían seguirse. La siguiente escena ejemplifica el trabajo con los errores:

El Profesor revisa mesa por mesa. Los niños trabajan en sus puestos. La cámara no registra los cuadernos, solo se escucha la conversación.

Jorge: ¿Está bien?

Profesor: mmm...Este ¿por cuánto lo tienes que amplificar? Dos por dos, eso, escriba eso. No, no, escribiste lo mismo. Mira. Tienes que multiplicar ese por ese, y ese por ese. Luego ese por ese y ese por ese. Luego tres por cinco y dos por cinco.

Jorge: aahh

Profesor: Ya, ahí está bien.

Por otro lado, a lo largo de las clases, varios estudiantes comentaron que no entendían por qué debían amplificar las fracciones para poder sumarlas. Al parecer, el significado de la equivalencia de fracciones no estaba claro para muchos de los estudiantes y esto dificultó la comprensión de los algoritmos. Si bien, el profesor mostró representaciones concretas de la amplificación del número $1/2$, y justificó que “es la misma cantidad” a $2/4$ y $3/6$ usando fotos de pizzas, este solo ejemplo no resultó suficiente. Por otro lado, algunos de los conceptos o notaciones empleadas por el profesor generaban confusión, por ejemplo, poner flechas en lugar del signo igual parece sugerir que no son números iguales (por ejemplo, $1/2 \Rightarrow 2/4$), el término “transformar” una fracción en otra equivalente también puede generar dudas respecto a la conservación de la cantidad inicial. La palabra “multiplicar” en lugar de amplificar, usada al parecer por descuido también parecía influir en la confusión. Frente a estas confusiones que aparecieron a lo largo de las dos clases el profesor no ahondó en justificar ni dar sentido a los procedimientos empleados, sino que reiteró los pasos a seguir o sugirió emplear otro método. La siguiente escena ejemplifica este hecho:

Los estudiantes resuelven ejercicios en sus cuadernos. Deben aplicar el método dos que consiste en amplificar cada sumando por el denominador del otro sumando. En la pizarra quedó escrito el siguiente ejemplo realizado por el profesor.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} \times \frac{5}{6} - \frac{6}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{20}{24} - \frac{6}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Una alumna se acerca al profesor que está en la pizarra.

Ángela: Profe, yo todavía no entiendo la multiplicación. (apunta el ejercicio escrito en la pizarra)

Profesor: Esto... se hace de esa forma. (apunta la pizarra)

Ángela: ¡Es difícil!

Profesor: Noooo

Ángela: Sí ¡no entiendo!

Profesor: Eso, lo multiplicas por eso. ¿Ves? Y esto, por 6, por el otro. Así. (apuntando lo hecho en la pizarra)

Ángela: No entendí (se acercan otras niñas a hacer consultas al profesor y Angela vuelve a su puesto)

10 minutos después

Ángela: Profe, no entiendo. Es que acá lo tengo que multiplicar o amplificar o simplificar. (otra vez apuntando el ejercicio escrito en la pizarra)

Profesor: Amplificar

Ángela: ¿Puedo ocupar la pizarra?

Profesor: O puedes ocupar el método uno si te resulta más fácil

Ángela: ¿Cuál es el método 1?

Profesor: Encontrar las familias

Ángela: No, gracias. Prefiero amplificar. ¿Puedo ayudarme con la pizarra?

Profesor: Sí.

g) Razonamiento lógico

El razonamiento lógico constituye una de las formas de pensamiento características de la matemática, según Jablonka (2014) este se caracteriza por un constante cuestionamiento de suposiciones y apreciación de la inferencia lógica para derivar a conclusiones. El tópico del razonamiento lógico puede considerarse como implícito al modelo de entornos didácticos, ya que este modelo se basa en una concepción piagetana del aprendizaje, la que considera el razonamiento lógico como uno de los elementos que el ser humano desarrolla naturalmente como respuesta a un medio resistente. Sin embargo, en los casos estudiados se observó una notoria diferencia en cuanto a la forma en que los profesores abordaron el razonamiento, por lo que se consideró pertinente relevarlo en una categoría específica.

En la clase del profesor Pedro, el razonamiento estuvo presente en la forma en cómo los estudiantes desarrollaron estrategias o descartaron conjeturas, lo que ha podido apreciarse en escenas anteriores. Además, resultó particular la forma en que el profesor incentivó el razonamiento lógico en sus estudiantes, observándose discusiones donde las formas de razonamiento lógico fueron abordadas de manera explícita por el profesor, por ejemplo, se les incentivaba a establecer “implicancias” como una forma de operar de la matemática, conectando la idea con otros casos de implicancias cotidianas e intuitivas y otras de contenidos vistos antes en matemática. La siguiente escena ejemplifica esta categoría.

Profesor:	Escuchen bien. Si yo digo que un medio es menor a $\frac{2}{3}$, ¿podría ser que no necesariamente $\frac{2}{3}$ sea mayor que un medio?
Alumnos:	mmmm...
Javiera:	Es que me confundí
Profesor:	A ver, entonces se los voy a demostrar (toma materiales, dos tercios y un medio y los muestra). Bueno, ustedes tenían esto, ¿verdad? Compararon así. Lo que yo estoy diciendo aquí es que un medio es menor a dos tercios, ¿cierto? Ya. Amaro. Si un medio es menor que dos tercios, ¿podría decir que no es obligación que dos tercios sea mayor que un medio?
Alumnos:	mmmmm
Javiera:	La pregunta no se entiende.
Profesor:	¿De nuevo la pregunta no se entiende?
Amaro:	La pregunta como que da muchas dudas.
Javier:	Sí, sería necesario porque está diciendo lo mismo, pero al revés.
Profesor:	Exactamente. Ya, Javier lo entendió, ¿el resto sigue perdido? ¿Quién no entendió nada? (Pocos niños levantan la mano)
Profesor:	No les creo, quién no entendió nada, levante bien la mano, no les creo porque si les pregunto no me van a saber explicar, ¿quién no entendió nada? de nuevo (otros alumnos levantan la mano) ya, por ahí sí, ahí sí les creo un poquito más. Vale. Más o menos algunos, ok. Hagamos una analogía, podría yo salir de la sala, ¿pero no necesariamente entrar al pasillo?
Alumnos:	Si... No...
Profesor:	mmm... podría salir por la ventana, ya, la ventana no es opción... Imaginemos que la ventana es muralla ¿vale?
Sofía:	Saltando pa'l frente
Profesor:	Pero ya es pasillo, es parte del pasillo po, obvio que sí.
Sofía:	Pero si salta más fuerte.
Profesor:	mmm... ya, mal ejemplo entonces, ¿pero se entendió un poco más?

Javiera:	Ah, ¡ya entendí!
Profesor:	Ya, el Javier dice lo siguiente, que si nosotros aseguramos que un medio es menor que dos tercios es obligación que dos tercios sea mayor que un medio.
Alumnos:	Aaahhh (a coro)
Profesor:	Por eso Jorge decía, es necesario decirlo, no puedo no decirlo, porque es lo mismo, pero al revés, si no lo dijera sería una contradicción. ¿Cierto?
Alumnos:	¡Siii!
Profesor:	¿Sí? Lo que hicimos fue dar vuelta una oración, porque en matemática hay muchas cosas que implican otras cosas, ¿sí o no? Cuando estábamos hablando la otra vez de los múltiplos y de los divisores, ¿se acuerdan o no? Díganme que sí por favor
Alumnos:	Siiii
Profesor:	Gracias (risas) Si yo decía que 15 es múltiplo de 5 (escribe en la pizarra) ¿qué implicaba para el 5 hacia el 15?
Belén:	Era divisor
Profesor:	Que el 5 es divisor, ¿cierto? Entonces ¿podría ser que el 15 fuera múltiplo de 5 pero que el 5 no fuera divisor de 15?
Alumnos:	Noooo (a coro)
Alonso:	Perdería el sentido
Gabriel:	Se contradice
Profesor:	Perfecto argumento, pierde el sentido. ¿Cierto? Pierde todo el sentido, súper bien.

Pese a que los estudiantes se mostraron en un principio confundidos sobre la intención del profesor, parecieron captar el sentido de la explicación. Es plausible pensar, por las intervenciones de los estudiantes a lo largo de la clase, que el profesor regularmente impulsa a incorporar estas formas de pensamiento y apropiarse de ellas para arribar a conclusiones propias.

En la clase del profesor Aldo, no se hace alusión de forma directa a elementos del razonamiento lógico, pero estos están presentes de forma intuitiva en los estudiantes, al buscar el porqué de los algoritmos y la justificación de algunos de estos pasos. Esto no ocurre con todos los estudiantes y la mayoría intenta recordar los procedimientos, sin embargo, algunos estudiantes parecen querer identificar razones plausibles detrás de los procedimientos.

El profesor enseña un método para sumar fracciones de distinto denominador, que consiste en hallar familias de fracciones equivalentes para cada sumando y “elegir” dentro de cada familia, aquellas con igual denominador. Ha escrito en la pizarra muchas fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$. Pone flechas en lugar del signo igual entre fracciones equivalentes.

Profesor: (profesor encierra $\frac{8}{20}$ y $\frac{5}{20}$ en un rectángulo) Santi, acá por favor, concentración. Mira el denominador aquí, es igual a este, ¿cierto? por eso ambos los encerré en rojo porque este denominador es igual a éste. Josefa. Aquí los denominadores son iguales. por tanto, ahora que los denominadores son iguales ¿qué puedo hacer? sumarlos.

Gabriel: ¿Por qué?

Profesor: Porque eso es lo que quiero hacer, quiero sumar. $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

Gabriel: ¿Pero por qué tiene que ser igual el denominador?

Profesor: Entonces, ¿cómo hago que los denominadores sean iguales?

Roberto: No sé, porque usted dijo que quería sumar $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

Profesor: Quiero sumar dos quintos más un cuarto entonces tengo que encontrar fracciones equivalentes a esas. Una fracción equivalente a dos quintos y una fracción equivalente a cinco, a perdón a un cuarto, ¿para qué? para poder sumar. Entonces, esto es lo que estoy haciendo, para sumar dos quintos con un cuarto ¿qué tengo que hacer? Tengo que transformarlos

Gabriel: ¡Y por qué los va a transformar!

Profesor: Porque necesito que tengan el mismo denominador ¿cómo hago que tengan el mismo denominador? Busco sus fracciones equivalentes. Busco la fracción equivalente de dos quintos, aquí, aquí está, busco una fracción equivalente de, de un cuarto y ahí está. Por eso las flechas, la fracción equivalente de dos quintos es ocho octavos o sea ocho veinteavos y la fracción equivalente de un cuarto. ..

Francisca: $\frac{5}{20}$

Profesor: $\frac{5}{20}$. Ahora, que tienen, igual denominador, puedo sumarlos. ¿Cómo aprendimos a sumar esto? ¿ $8+5$?

Martina: 13

Profesor: 13 ¿y qué hago con los denominadores?

Roberto: Intactos

Francisca: Se quedan igual

Profesor: Bien, se quedan igual y suman los numeradores. ¿Por qué puedo hacer eso? porque ya encontré las fracciones equivalentes... ¿cansador o no cansador?

Alumnos: ¡Siiiiii!

Gabriel: No entendí

h) Producciones creativas de los estudiantes

El modelo de análisis de entornos didácticos es un modelo diseñado para analizar la forma en que el profesor gestiona la clase, por ende, atiende a las aristas del triángulo

didáctico profesor-alumnos y profesor-saber matemático. Con esta categoría emergente se quiso atender a la arista alumnos-saber matemático, centrándonos específicamente en las producciones creativas.

Se analizan acá los momentos de la clase donde los estudiantes pudieron establecer soluciones, preguntas o relaciones entre conceptos matemáticos o establecieron relaciones entre conceptos matemáticos y elementos de fuera de la matemática, que resultaron perspicaces y/o novedosos desde la perspectiva de los estudiantes. Es decir, se registran producciones creativas desde una perspectiva más amplia que en la fase cuantitativa, que solo registró la creatividad en la resolución de problemas abiertos.

En la clase de Pedro se registraron al menos cuatro de estos episodios. Las producciones creativas consistieron en generar estrategias que los estudiantes no conocían a priori, por ejemplo, intercambiar piezas equivalentes a conveniencia. En otros momentos generaron preguntas interesantes como “si cambio de orden las piezas ¿se mantiene siempre el área?”. La siguiente escena muestra una estudiante que establece una relación entre el denominador y el número de departamentos de un edificio. Esta comparación sugiere que la estudiante no solo ha logrado dar sentido al concepto de fracción, sino que además lo relaciona con elementos extra matemáticos. En general estas producciones creativas estuvieron en relación con las tareas dadas por el profesor, o con los conceptos discutidos de manera colectiva y fueron posibilitadas, en gran medida, por el tiempo que el profesor dio para resolver cada tarea.

El profesor modera una discusión de curso donde comentan la actividad de comparar $\frac{4}{5}$ con $\frac{5}{9}$. Ya han logrado determinar que $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{5}{9}$. Una alumna levanta la mano. El profesor le da la palabra.

Fernanda:	Que era como que, $5/9$ era más numeroso, números más grandes, pero más pequeños, entonces como que ahí...
Profesor:	Hay como una trampa. ¿Ustedes como en qué curso empezaron a ver fracciones?
Alumnos:	En tercero
Profesor:	O sea que, por ejemplo, en primero o en segundo básico no tenían idea de fracción. Ya. Si le hubiésemos puesto este ejercicio a un niño de primero, de segundo básico, y le decimos, mira, hay unos números que se pueden escribir así, con un número arriba y un número abajo. (profesor escribe en la pizarra $4/5$ y $5/9$) Cuál crees tú que es mayor. ¿Qué creen que ese niño de segundo básico hubiese respondido? (muchos levantan la mano) ¿Vale?
Valentina:	¿ $5/9$?
Profesor:	¿Por qué crees que ese niño hubiera dicho eso?
Valentina:	Porque yo hubiera creído que el número de arriba, el 4, es menor que el 5, y el 5 es menor que el 9, entonces hubiera creído que se hacía así.
Profesor:	Claro, en segundo básico sabe que el 9 es mayor que el 5, sabe que el 5 es mayor que el 4, entonces dice, no tengo a donde perderme, o sea, esta persona está loca que me está preguntando eso, que es como obvio. (niña levanta la mano) ¿Franz?
Franz:	Que es verdad lo que dice la compañera, que tomamos por ejemplo un entero, y pusimos como un edificio y dijimos que, queríamos hacer caber en este edificio 300 departamentos, pero esos 300, que eran mucho más que 10, eran muchos más chicos.
Profesor:	Perfecto. Y ese es un buen argumento para decirle al niño que estos 9 son más chicos que estos 5, ¿cierto? (el resto de los estudiantes asiente, y dicen que sí)

En la clase del profesor Aldo ninguna escena cumplió con las características para ser incluida en esta categoría. Los estudiantes más bien estuvieron aplicando los algoritmos enseñados por el profesor e intentando comprender algunos aspectos centrales, como por qué dos fracciones eran iguales cuando se amplificaban o simplificaban.

4.2.2.4. Articulación de las categorías

Un aspecto que se desprende del análisis, es la interrelación entre las categorías observadas. Si bien cada categoría ha sido descrita de forma independiente, se observa la influencia entre todas las dimensiones del modelo, en un funcionamiento sistémico y articulado. En otras palabras, cada una de las categorías es influenciada e influye en el resto,

de modo que no se trata de una lista de elementos aislados sino de un modelo con dimensiones interdependientes.

A continuación, se muestran algunos fragmentos que permiten aterrizar este aspecto. Por ejemplo, el siguiente diálogo corresponde a una clase del profesor Pedro donde este presenta una tarea a la clase:

El profesor escribe en la pizarra “Comparar fracciones. Emplear el material para demostrar si una fracción es ‘igual’, ‘mayor que’ o ‘menor que’ otra”.

Profesor: Entonces vamos a hacer lo siguiente, les voy a escribir en la pizarra un par de fracciones, así como: $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ (escribe estos números). La idea es que ustedes sin hacer ningún cálculo, sin papel, así como restar, sumar, o lo que sea, puedan... (remarca la palabra demostrar) ¿Qué es lo que hay que hacer específicamente?

Alumnos: Demostrar

Profesor: Ya, hay que demostrar, ¿cierto?, ¿Demostrar con palabras? ¿Sofía?

Sofía: No, demostrar con representación.

Profesor: Perfecto, con qué tipo de representación, Vale.

Vale: ¿Pictórica?

Profesor: Ya, se parece a la pictórica, pero es más bien... (toca el material)

Alumna: Concreta

Profesor: Ya, concreta, ¿cierto? Pero es como, lo mismo, es como si fuera el dibujo. Ya, hagamos una prueba, con esto (encierra en un recuadro el $\frac{1}{2}$ y el $\frac{2}{3}$). Todo el grupo tiene que estar de acuerdo y me tiene que decir si $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, uno es mayor que otro, uno es menor que otro o los dos son iguales, pero me tiene que demostrar.

Si bien este fragmento corresponde de forma más directa a la categoría *dificultad de las tareas*, con una tarea de alta complejidad orientada a la demostración, podemos identificar que influye en otras categorías. Por un lado, la tarea tiene el potencial de que los estudiantes logren encontrar regularidades en la comparación y equivalencia de fracciones, lo que acompañado de la gestión adecuada puede contribuir a una *institucionalización* centrada en las producciones de los estudiantes. Por otro lado, el material usado en la tarea permite un *tratamiento del error* donde los estudiantes pueden establecer por sí mismos sus errores y

corregirlos. Asimismo, la tarea no anticipa algoritmos ni estrategias de resolución por lo que requiere que los estudiantes deban construir sus soluciones, lo que incide en la categoría *producciones creativas de los estudiantes*. Por ende, una tarea de estas características no asegura, pero sí favorece, que las otras categorías muestren rasgos de un entorno activo. Lo mismo puede observarse en el siguiente fragmento, donde se presenta una discusión grupal desarrollada en el curso de Pedro:

En el contexto de una discusión con toda la clase donde comparten sus conclusiones respecto a qué fracción es mayor entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$.

Profesor: Entonces, el grupo de ustedes no llegó a un consenso, ¿cierto? Todavía estaban discutiendo cuál era mayor. El Arturo decía lo que varios grupos decían así que les voy a robar un poquito la idea. Decían que estos pedazos que no están cubiertos por los celestes, que no tienen abajo superficie celeste, si los recortáramos y lo pusiéramos aquí alcanzaríamos a cubrir esa parte y un poquito, y todavía sobraría superficie celeste.

Carla: Entonces la conclusión sería que sobra más porque la otra parte que, es más delgada, entonces es más el celeste porque está más afuera.

Profesor: Ok, super.

Angela: La conclusión es que $\frac{3}{5}$ es mayor

Profesor: Claro, $\frac{3}{5}$ era mayor que este. Pero pregunta, volvamos a la instrucción inicial, que tenemos que demostrar con el material ¿Se hace fácil demostrar con el material para este caso?

Jorge: No tanto

Profesor: No tanto. Tenemos que empezar a usar un poquito la imaginación, o sea como “imagínate que recortamos este pedazo” ¿cierto? Ya no es tan fácil como demostrarlo en este caso. Demostrar que aquí era más celeste que verde era fácil (mostrando el caso anterior, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{9}$). Demostrar que aquí era más celeste que verde no era tan fácil.

Alonso: Que uno para calcularlo deberíamos ocupar una regla.

Profesor: Así como medir. Perfecto me parece super bien, podría haber sido. Hagamos la última prueba. Pero quiero que quede claro que el material, para este caso, como que no nos sirvió mucho. Si hubiese servido mucho, ese grupo no hubiese tenido la discusión que tuvo.

El fragmento corresponde a la categoría *posibilidades de comunicación*. Se observa que el profesor emplea los aportes, las dudas y las conclusiones de distintos grupos para avanzar en una discusión colectiva. Al mismo tiempo, puede observarse cómo en esta forma

de comunicación está presente la categoría *razonamiento lógico*, ya que el profesor explicita las implicancias que pueden establecerse y cuáles aun no son posibles de establecer debido a la falta de una prueba válida. En esta discusión, además, se evidencia la necesidad de avanzar en una forma de prueba más convincente, como preámbulo de una *institucionalización* que establezca las conclusiones que aún no han logrado construir.

De la misma forma, la interrelación entre las distintas categorías puede observarse en el caso del entorno reproductivo. El siguiente fragmento muestra la presentación del contenido de adición de fracciones ocurrido al comienzo de la segunda clase del profesor Aldo:

Profesor:	Si tengo cinco octavos, ya, tengo cinco. No, antes. Si tengo una pizza y la dividido en cuantos pedazos
Alumno:	¡en 8 partes!
Profesor:	8 partes. Después tengo, tengo otra pizza de otro sabor, bueno en estas fotos son del mismo sabor, y que también la divido en ocho partes, pero de la primera pizza me como 5 y de la segunda pizza me como un pedazo.
Alumna:	No profe, se comió 7 y de la otra 3
Profesor:	¡Ah! ustedes lo quieren hacer al revés, ya. Entonces déjenme cambiar la frase. Yo no me comí 5 pedazos, a mí me sobraron 5 pedazos, y de la otra piza me sobró 1 pedazo. ¿Cuántos pedazos me sobraron?
Martín:	6
Profesor:	Me sobran 6 pedazos de $\frac{1}{8}$ de pizza. O sea, $\frac{6}{8}$. Y lo que hacemos es lo que dijo martín. Miren, mantengo el denominador y sumó los numeradores, en palabras más sencillas, mantengo el número de abajo y sumo los de arriba. ¿por qué debo mantener los números de abajo?
Alumno:	Porque se repiten
Profesor:	Porque ambas pizzas están divididas en...
Alumna:	En lo mismo
Profesor:	Lo mismo, por tanto, son el mismo denominador. Insisto, solo puedo sumar de esta forma cuando tengo igual denominador.

En este fragmento se observa la presentación inicial del contenido abordado, es decir, corresponde a la categoría *institucionalización*. La presentación de los contenidos enfatiza la

enseñanza de los pasos necesarios para realizar la suma de fracciones con igual denominador. Es una institucionalización que ocurre al principio y que solo incorpora respuestas cortas de los estudiantes a preguntas sencillas, y no el desarrollo de ideas más complejas. Puede observarse que este tipo de institucionalización incide en las características de las tareas que el profesor propone a continuación (categoría *dificultad de las tareas*). Tareas sencillas que consisten en la reproducción del algoritmo, cuyo foco es practicar los pasos antes presentados. Asimismo, la categoría *razonamiento lógico* se ve influenciada, ya que al centrar la clase en la enseñanza de “los pasos” sin atender a las razones que sustentan los pasos del algoritmo enseñado, no aparecen intervenciones que atiendan, por ejemplo, a la generalidad del algoritmo u otros aspectos lógicos involucrados en el procedimiento. La categoría *posibilidades de comunicación* es otro aspecto que parece influir en el tipo de institucionalización realizada. Los estudiantes se comunican lanzando ideas y comentarios en voz alta, sin esperar tener la atención del resto ni del profesor. El profesor atiende solo las intervenciones correctas. Esta forma de comunicación dificulta el surgimiento del tipo de discusiones que resultan necesarias para una institucionalización que incorpora el desarrollo de ideas de los estudiantes.

En definitiva, las categorías de análisis actúan de forma integrada para conceptualizar las dinámicas al interior de los entornos didácticos. No se trata de una lista de aspectos independientes que revisar en cada caso sino de aspectos que se influyen unos a otros. En este sentido, las categorías que emergieron del análisis: razonamiento lógico, tratamiento del error y producciones creativas de los estudiantes, resultan relevantes para describir el sistema en su totalidad y, por tanto, contribuyen a robustecer el modelo de entornos considerado

inicialmente, ya que agregan elementos que resultan relevantes tanto por lo que capturan como por su influencia en el sistema.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Diversas investigaciones durante las últimas cuatro décadas han estudiado la creatividad y su relación con el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, algunos estudios en esta línea han abordado la forma en que distintos elementos del entorno escolar pueden incidir en el desarrollo del pensamiento matemático creativo (Barquero et al., 2014; Leikin & Pitta Pantazzi, 2013; Singer; Sheffield & Leikin, 2017). Inserta en esa discusión, esta tesis se propuso comprender la forma en que los entornos didácticos afectan la creatividad matemática de estudiantes chilenos de 5° año básico.

Para cumplir con este objetivo general se empleó un diseño metodológico mixto secuencial explicativo en dos fases (Creswell, 2014). La primera fase cuantitativa abordó los primeros tres objetivos específicos de la tesis. La segunda fase cualitativa abordó el cuarto objetivo específico. A continuación, se discuten los resultados de ambas fases del estudio en el orden de los objetivos específicos.

5.1. Evaluación de la creatividad matemática

El primer objetivo específico de esta investigación fue evaluar la creatividad matemática de estudiantes de 5° año básico. Para ello se elaboró y piloteó un test compuesto de ítems de problemas de solución múltiple, los que fueron seleccionados, traducidos y adaptados de test con evidencia de validez en poblaciones de estudiantes de Europa y Norteamérica (Sighn, 1987; Lee & Seo, 2003; Tabach & Fiedlander, 2013; Kwon et al, 2006).

El instrumento fue aplicado a 576 estudiantes de 5° básico pertenecientes a 21 cursos y 17 escuelas de la Región Metropolitana, con índices de dificultad y discriminación adecuados y una confiabilidad apropiada para un test de estas características. Mediante esta

evaluación se identificó el desempeño en las tres dimensiones de creatividad matemática reportadas por la literatura: fluidez, flexibilidad y originalidad. Los resultados de la prueba indicaron que la mayoría de los estudiantes pudo desarrollar múltiples soluciones, diversas estrategias (al menos 2) y, en menor medida, encontrar soluciones originales. Además, los resultados muestran que los puntajes tienen una alta variación en distintos grupos, considerando la desviación estándar y el rango (distancia entre máximo y mínimo).

Las medias de los puntajes mostraron diferencias por género y por nivel socioeconómico, siendo la media del nivel socioeconómico alto 5 puntos aprox. más alta que la media del nivel socioeconómico medio bajo. Asimismo, la media de las niñas fue de 1.5 puntos más que la media de los niños. Estos resultados se confirman en el modelo multinivel, por lo que su alcance será discutido en profundidad en los apartados siguientes (ver apartado sobre la influencia de otras variables de control).

Es importante señalar que este instrumento, al igual que los test referenciados, evaluó solo un ámbito de la creatividad matemática: la capacidad de generar múltiples soluciones a un problema abierto. Pese a que autores con foco psicométrico (e.g. Leikin, 2009) asuman que este tipo de test entrega una medida íntegra de creatividad, en esta investigación los puntajes representan solo un ámbito de esta habilidad que se considera más compleja y que involucra aspectos como la capacidad de proponer nuevas preguntas o nuevas relaciones entre objetos, los que no fueron capturados en esta evaluación. Como sugiere Cropley (1996), es posible que los test no abarquen las complejas dimensiones que involucra la capacidad creativa, sin embargo, reportan algunos aspectos de esta capacidad y es importante considerarlos, tomando con distancia sus alcances.

5.2. Caracterización de los entornos didácticos

El segundo objetivo específico de esta investigación consistió en caracterizar los entornos didácticos donde se desenvolvían los estudiantes. La pauta creada a partir del modelo de análisis de entornos didácticos (Sarrazy & Novotná, 2013) permitió caracterizar las clases de los 21 cursos participantes en las 6 dimensiones del modelo. Estas dimensiones provienen de la teoría de situaciones didácticas y describen aspectos que permiten inferir características del contrato didáctico instalado en un grupo en particular.

Al buscar grupos lo suficientemente distintos entre sí, el análisis de clusters arrojó dos grupos, a los que nombramos *activos*, con mayores puntajes promedio en todas las dimensiones, y *reproductivos*, con menores puntajes en promedio. Este resultado es distinto a lo obtenido por Sarrazy y Novotná (2013) quienes, al realizar un análisis de agrupación por conglomerados similar al de nuestro estudio, obtuvieron tres grupos diferentes, uno de ellos con una mezcla de características de los otros grupos. En este sentido es importante considerar las diferencias contextuales. La investigación de Sarrazy fue realizada en Francia, donde las prácticas de los profesores, el currículum y la formación docente tienen características particulares, que podrían variar a las de los profesores chilenos. Por otro lado, la muestra de nuestro estudio se compuso de profesores que se incorporaron voluntariamente al proyecto motivados por aprender sobre desarrollo de la creatividad, por lo que suponemos que nuestra muestra no incluyó al grupo de profesores más tradicionales. Futuros estudios con muestras aleatorias podrían cubrir una tipología representativa del profesorado chileno.

Las diferencias en los grupos encontradas en este estudio consistieron en diferencias en las medias obtenidas para cada dimensión, donde el grupo *entornos activos* obtuvo medias

mayores en todas las dimensiones del modelo de entornos didácticos, es decir, se observa una tendencia del grupo *entornos activos* a: presentar tareas más desafiantes en la clase, una presentación de los contenidos o institucionalización con mayor incorporación de las ideas de los estudiantes y una mejor gestión de la comunicación, en comparación con las aulas del grupo *entornos reproductivos*. Otro aspecto que distinguió claramente ambos grupos fue la manera en que reaccionaron a las preguntas y contribuciones de los estudiantes, mientras que el grupo *entornos reproductivos* tendió a dar las respuestas a las preguntas, el grupo *entornos activos* usó con mayor frecuencia estrategias como devolver la pregunta a la clase, o pedir que un estudiante justificara sus soluciones. Por otro lado, se observó que la capacidad de los profesores para variar la dificultad de los problemas también resultó ser mayor en los cursos del grupo *entornos activos*. Es decir, los profesores de este grupo mostraron mayor conocimiento sobre distintas formas de hacer más difícil un problema para sus estudiantes, por ejemplo, variaciones en el orden sintagmático y operativo, inclusión de datos irrelevantes, entre otras.

Es importante notar que estas características corresponden al promedio de las dimensiones del grupo y no necesariamente todos los cursos del grupo *entornos activos* tienen un puntaje mayor en todas las dimensiones a las del grupo *entornos reproductivo*. Pese a esto, los puntajes son más o menos homogéneos, ya que las distintas dimensiones del modelo están conceptualmente relacionadas, por ejemplo, una institucionalización activa involucra un trabajo con preguntas desafiantes y un adecuado manejo de la comunicación.

En definitiva, las diferencias en los grupos involucran formas distintas en que el contrato didáctico se ha instalado en cada caso, y reflejan normas y expectativas del profesor

y los alumnos acerca de su relación con el saber matemático en juego (Brousseau & Sarrazy, 2014). Así, en los *entornos activos* puede inferirse que estas normas y expectativas involucran en mayor medida una participación activa (de ahí la denominación) de los estudiantes con el saber, lo que puede reflejarse en retroalimentaciones que les demandan mayor compromiso intelectual, preguntas y tareas que les motivan a crear soluciones o estrategias y preguntas que varían en la dificultad ligada a distintos aspectos, y que por tanto, no les permite adaptarse a reiterar algoritmos preestablecidos sin atender a la situación específica. Asimismo, en los *entornos reproductivos* se han instalado, en mayor medida, normas implícitas que permiten a los estudiantes adoptar un rol en la relación con el saber consistente en *reproducir* lo que los profesores enseñan, debiendo esperar sus indicaciones, sus ejemplos, retroalimentaciones directas que les indiquen si lo que han realizado está bien o mal (Sarrazy & Novotná, 2013).

Debe considerarse que no se trata de dos grupos homogéneos, donde todos los cursos reflejen las características antes descritas de manera absoluta, sino de aspectos que se observan en mayor o menor medida en ambos grupos, pero con diferencias al interior de cada uno. Por otro lado, es importante considerar que las dimensiones del modelo de entornos didácticos no pretenden indicar “buenas prácticas” de la enseñanza, sino que su propósito es entregar elementos para inferir las normas y expectativas que regulan la relación con el saber, y que son subyacentes a las prácticas que se observan en la clase de matemática.

Además, al incluir la dimensión *disposición organizativa* no se hallaron agrupaciones estables, lo que puede explicarse por el hecho de que esta dimensión era la única que observaba un aspecto más práctico y no relacionado directamente con la forma en que los

profesores gestionaban los procesos de enseñanza y aprendizaje. En efecto, el hecho de disponer a los estudiantes en grupos no implica una disposición activa al aprendizaje, a diferencia del resto de las dimensiones que estaban más vinculadas entre sí. Este aspecto es distinto a lo obtenido por Sarrazy y Novotná (2013), quienes observaron que los profesores que sentaban a los alumnos en grupos tenían prácticas más relacionadas con el grupo entornos activos. Es posible que en nuestro país el trabajo en grupos de estudiantes no esté siendo lo suficientemente aprovechado por los profesores.

5.3. Influencia de los entornos didácticos en la creatividad matemática

El tercer objetivo específico del estudio fue determinar la relación entre los entornos didácticos y la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico. Los resultados muestran que la agrupación por aulas explicó un 16% de la varianza en los puntajes del test de creatividad matemática, mediante el uso de modelos multinivel (modelo nulo). Lo anterior coincide con lo encontrado en las investigaciones de Kanhai & Singh (2016), Kwon et al. (2006), Tabach & Friedlanyer (2013) quienes reportaron una distribución de la varianza a nivel del aula. Este hallazgo, por un lado, justifica el uso de modelos multinivel y, por otro, muestra la importancia de indagar en los elementos del aula que pueden explicar tal distribución. En estricto rigor, una agrupación por aula no implica que las características asociadas a la enseñanza permitan explicar las diferencias, sino que hay elementos que afectan al curso en general, pero estos elementos podrían ser de diversa índole. Por lo mismo este estudio incluyó modelos con variables asociadas a la enseñanza.

Los resultados obtenidos a partir del segundo modelo (relación entornos didácticos y creatividad matemática sin variables de control) dan cuenta de que la relación entre un

entorno activo y los resultados en el test no es significativa si no se incorporan variables contextuales. Es decir, la influencia del aula sobre la creatividad no puede estudiarse sin considerar la mediación de otras variables, ya que por sí sola no muestra un efecto significativo. Otros estudios (por ejemplo, Kwon, et al., 2006; Mann, 2009) han dejado fijas algunas variables como el nivel socioeconómico, considerando solo escuelas de clase media en países desarrollados. Si bien, parece obvio que los estudios en educación deben incorporar variables contextuales como el nivel socioeconómico, es un resultado importante que las prácticas de los profesores, por complejas y sofisticadas que sean, no muestran relación con la creatividad si el modelo no controla factores contextuales. Tal como sugiere Dai et al (2012) elementos no considerados en este estudio, como la influencia de los entornos familiares, pueden incidir en el desarrollo de la creatividad en mayor medida que las prácticas de los profesores.

Finalmente, las dimensiones del aula matemática consideradas en este estudio resultaron en su conjunto significativas para predecir los puntajes en el test de creatividad matemática de los estudiantes, una vez incorporadas las variables de control género, NSE y SIMCE (modelo 3), lo que constituye uno de los hallazgos principales de esta tesis. Es decir, los alumnos pertenecientes a las aulas agrupadas como *entornos activos*; a saber, entornos didácticos con preguntas más desafiantes, con mayor incorporación de sus ideas al desarrollo de la clase, con una retroalimentación del profesor que les incentivara a un pensamiento más activo, con mayor comunicación entre los distintos actores de la clase y donde el profesor tuvo mayor capacidad para variar la dificultad en los problemas; tuvieron puntajes significativamente más altos que sus pares en el test de creatividad matemática, a saber, casi

2 puntos más en promedio, lo que implica un mejor desempeño creando más respuestas y más variadas en cuanto a la estrategia utilizada en un test de problemas matemáticos de soluciones múltiples, considerando en esta relación la mediación de factores como el NSE, el SIMCE y el género.

Estos resultados proponen que el entorno didáctico, es decir, el perfil de acciones de los maestros que orientan características específicas del contrato didáctico instalado entre un profesor y su grupo de alumnos, tiene influencia sobre la capacidad creativa de los estudiantes, una vez controladas variables contextuales. Este resultado coincide con la investigación realizada por Sarrazy y Novotná (2013), donde concluyeron que una enseñanza que adapta a los alumnos a esperar las soluciones, indicaciones, retroalimentaciones directas del profesor y donde la creación de ideas no es tan necesaria para el desarrollo de la clase, puede propiciar una menor capacidad creativa. Por el contrario, clases donde los estudiantes tienen un rol activo en la creación de ideas, donde se vean desafiados a pensar sobre las producciones de otros, y donde las normas tácitas sugieren la necesidad de crear soluciones, podrían contribuir a desarrollar la creatividad.

La estrategia cuantitativa empleada en este estudio no analizó la influencia de cada dimensión del modelo de entornos didácticos por separado. Esto, por un lado, se debe a que el número de la muestra no permitió incluir tantas variables al modelo y, por otro, a que el modelo de entornos didácticos involucra dimensiones relacionadas entre sí y que operan conjuntamente. Sin embargo, podemos discutir algunas de estas dimensiones a la luz de lo que otras investigaciones han encontrado.

Por ejemplo, sobre la dimensión *dificultad de las tareas*, hay evidencia que muestra que enfrentar a los estudiantes a verdaderos problemas matemáticos, es decir, tareas donde el mecanismo de solución no es a priori conocido, resulta adecuado para promover la creatividad, ya que los estudiantes se ven impulsados a construir sus estrategias de resolución (Freiman, 2018; Hashimoto, 1997; Kwon et al., 2006; Nohda, 2000; Pehkonen, 1997). Sin embargo, algunos estudios señalan que el hecho de incorporar este tipo de actividades no es suficiente para generar un ambiente de aula favorecedor, por ejemplo, Herkovitz (2009) menciona que un mismo problema desafiante puede ser implementado de formas muy distintas, y que las creencias y formas de gestionar el aula de los profesores pueden transformar una buena estrategia en una clase común, lo que reafirma la importancia de considerar otras dimensiones del quehacer docente.

Por otro lado, la dimensión *posibilidades de comunicación* respalda los resultados de Hershkowitz, Tabach y Dreyfus (2017), quienes mostraron mediante un estudio de casos que las ideas creativas son el resultado de la acción comunicativa entre pares en la sala de clases, por lo que el trabajo conjunto entre los estudiantes resulta favorecedor para desarrollar la creatividad. La dimensión referida a la capacidad de los profesores de variar la dificultad de los problemas concuerda con los resultados de Sarrazy (2002) quien sostuvo la importancia de esta capacidad para reducir la adaptación de los estudiantes a un tipo de preguntas y, por tanto, impulsarlos a relacionarse activamente en la resolución de problemas variados, lo que contribuye a promover su capacidad para crear estrategias nuevas.

Otras dimensiones como *validación de las producciones e institucionalización* han sido menos exploradas por la literatura, por lo que este estudio aporta en esa línea. La dimensión

institucionalización muestra la importancia de que las ideas, preguntas, soluciones y relaciones entre objetos que realizan los estudiantes durante la clase sean incorporadas en la presentación de los contenidos matemáticos. Por otro lado, la dimensión *validación de las producciones* atiende a la forma en que el profesor reacciona a las ideas y preguntas de los estudiantes, señalando que una validación que devuelva al alumno la responsabilidad de construir el saber, no respondiendo directamente las preguntas, no corrigiendo directamente los errores, sino que planteando preguntas que medien y lo estimulen a pensar, contribuye en conjunto con las otras variables a promover la creatividad de los estudiantes.

Influencia del NSE, género, SIMCE, y perfil de la escuela

Como un subproducto del objetivo específico 3, se obtuvieron resultados relativos a la influencia de las variables de control usadas en el modelo multinivel sobre la creatividad matemática. En específico se observó la influencia del nivel socioeconómico, el género, los resultados en la prueba SIMCE de matemática y el perfil (alternativo a o tradicional) del colegio. Los resultados obtenidos para cada una de estas variables se discuten a continuación.

El nivel socioeconómico al que pertenecían los alumnos afectó significativamente los puntajes en el test de creatividad matemática, siendo el promedio del nivel socioeconómico alto 5 puntos mayor al promedio del nivel socioeconómico medio bajo. Este efecto fue mayor al de todas las variables incorporadas en el modelo, y mostró una diferencia en los promedios más del doble de la influencia de un entorno didáctico activo. Lo anterior coincide con los resultados de Singh (2006) quien mostró el efecto de la clase social en la creatividad matemática de estudiantes de la India pertenecientes a distintas castas. Por otro lado, Dai et

al. (2012) mostraron que las diferencias en creatividad general no se debían a factores estáticos como el nivel socioeconómico, sino que involucraban componentes dinámicos como el apoyo de la familia, el tipo de estímulo hacia el aprendizaje, la forma en que incorporan o escuchan las ideas de los niños, lo que podía estar influenciado por el nivel educativo de los padres. De esta forma, los hallazgos de este estudio identifican el nivel socioeconómico como un factor relevante pero no llegan a explicar con mayor detalle los elementos que podrían mediar esta relación.

Pese a lo anterior, es importante señalar que se observaron puntajes muy altos en todos los niveles socioeconómicos, incluyendo el más bajo, donde se alcanzó un puntaje de 28, que corresponde a más de una desviación estándar del promedio del nivel socioeconómico alto. Este aspecto es coincidente con lo reportado por la literatura, donde a partir de la aplicación de test de creatividad matemática pueden observarse resultados sobresalientes en diversos contextos (Singer, Sheffield & Leikin, 2017). Efectivamente, parte de la investigación en creatividad matemática se ha enfocado en identificar a estudiantes con alta capacidad creativa, bajo el supuesto que en estos sujetos subyacen talentos matemáticos que pueden ser desarrollados (Leikin & Sriraman, 2017).

Por otro lado, los hallazgos de este estudio muestran diferencias de género sobre la creatividad matemática, encontrándose un efecto significativo que favorece a las mujeres. Este resultado coincide con los estudios realizados por Mann (2009), Evans (1964), Jensen (1973) y Prousse (1967). El estudio de Mann (2009) mediante modelos de regresión analizó el efecto del género sobre la creatividad matemática encontrando que este factor contribuye a explicar un 0,47% de la varianza y que la diferencia es favorable hacia las mujeres. Evans

(1964) analizó los datos recopilados de estudiantes de octavo, séptimo, sexto y quinto grado. Las niñas de octavo y séptimo grado superaron a los niños con diferencias significativas. No se encontraron diferencias significativas de género para los grados restantes. Jensen (1973) investigó el desempeño en creatividad matemática en estudiantes de sexto grado en tres escuelas. Si bien la diferencia en las puntuaciones obtenidas entre las escuelas no fue significativa, sí se observaron diferencias significativas de género, con diferencias a favor de las mujeres observadas en una de las tres escuelas y ninguna diferencia en las otras dos. Prouse (1967) investigó la creatividad en matemática en estudiantes de séptimo grado. Informó una diferencia de medias significativa en las puntuaciones compuestas de creatividad que favorecen a las mujeres. Baer y Kauffman (2008) revisaron la literatura sobre creatividad general e identificaron diferencias de género, encontrando que la mayoría de las investigaciones basadas en pruebas de creatividad evidenciaron una diferencia favorable hacia las mujeres y niñas, sin embargo, proponen que es necesario ahondar más en estas diferencias para llegar a resultados concluyentes.

Al observar las diferencias de género en los puntajes del test según nivel socioeconómico, se encontró que, mientras en el nivel socioeconómico medio bajo casi no había diferencias, en el nivel socioeconómico alto las diferencias mostraron una gran brecha a favor de las mujeres. Podemos hipotetizar que la creatividad en el dominio matemático de las mujeres se ve favorecida en ambientes con mayor acceso a recursos educativos, y donde los estereotipos de género son menores. Por ejemplo, una investigación realizada con estudiantes chilenos de Kinder mostró que tanto niños como niñas pertenecientes a un nivel socioeconómico bajo asociaban la matemática con lo masculino, mientras que las niñas de

nivel socioeconómico alto no asociaban la matemática con ningún género (Del Rio, et al 2016). Es posible que estos estereotipos ejerzan alguna influencia en el desempeño creativo que mostraron las niñas de NSE bajo. Sin embargo, las investigaciones hasta el momento no ofrecen una explicación que permita argumentar por qué los niños pertenecientes al nivel socioeconómico alto, que obtienen altos puntajes en pruebas de selección múltiple como el SIMCE (Radovic, 2018), obtuvieron un puntaje menor al de las niñas. Sin duda, estos resultados son de gran interés, y permiten plantear la tesis de que al ampliar el registro de evaluaciones en matemática la conocida brecha a favor de los niños y jóvenes puede anularse o incluso revertirse.

Con respecto a cómo los conocimientos matemáticos pueden afectar la creatividad de los estudiantes este estudio no obtuvo resultados concluyentes. El único dato que pudo obtenerse fue el promedio de matemática en la prueba SIMCE de 4° año básico 2017, es decir, el promedio del curso obtenido el año anterior al estudio. El efecto resultó no ser significativo considerando el nivel de significancia usual de 5%, pero sí lo fue si se considera un nivel del 10%. Este dato debe ser tomado con distancia ya que no se trata de una medida individual, sino del promedio del curso. Un futuro estudio que explore la relación entre la creatividad matemática y los resultados individuales en cuanto a conocimientos matemáticos permitiría ahondar en las diferencias que se obtienen en ambas evaluaciones.

Sobre el efecto de pertenecer a una escuela alternativa la muestra de este estudio involucró algunas escuelas artísticas, Montessori o Freinet, las que en sus proyectos educativos mostraban como un objetivo explícito el desarrollo de la creatividad en sus estudiantes. Los resultados de esta investigación no mostraron ningún efecto significativo

sobre la creatividad matemática de los estudiantes, ni tampoco hubo mayor presencia de entornos activos en estas escuelas, sin embargo, la muestra solo contenía tres escuelas de este tipo, por lo que los resultados no fueron concluyentes en este tema. Si consideramos que una de las razones de los padres para que sus hijos ingresen en estas escuelas es que puedan desarrollar su creatividad, es evidente la importancia de este aspecto y sería interesante contar con mayores estudios que indaguen esta relación.

5.4. Tipos de entornos didácticos y su influencia en la creatividad en el aula

La segunda fase de la tesis abordó mediante una estrategia cualitativa el cuarto objetivo específico del estudio, orientado a describir la forma en que los entornos didácticos influyen en la creatividad matemática de los estudiantes en el aula. De acuerdo con la metodología planteada por Creswell (2014), los resultados de la fase cualitativa se discutirán analizando cómo la descripción realizada contribuye a profundizar y explicar los resultados de la fase cuantitativa, en particular, en lo que refiere a la relación entre los entornos didácticos y la creatividad. Es decir, esta fase del estudio no tiene por propósito corroborar los resultados de la fase cuantitativa, sino que profundizar y explicar los hallazgos, describiendo cómo la relación entre la creatividad y los entornos se manifiesta en casos particulares.

Si bien en la primera fase del estudio se identificó la influencia del entorno activo sobre la creatividad de los estudiantes evaluada en un test, no explicamos *cómo* los distintos entornos influyen en el desarrollo creativo. Para profundizar en esta descripción, en la fase cualitativa se estudiaron dos casos considerados paradigmáticos, ya que ejemplificaban los distintos tipos de entornos didácticos encontrados en la fase cuantitativa de la tesis. La clase

de Pedro representó los *entornos activos*, y la clase de Aldo, representó los *entornos reproductivos*.

Al analizar comparativamente tanto las categorías a priori, referidas a las dimensiones del modelo de entornos didácticos, como las categorías emergentes, se observó que las categorías fueron coherentes al interior de cada caso, y que actuaron integradamente como un sistema más que como una suma de elementos disgregados. De este modo, observar rasgos de un entorno reproductivo en una categoría influyó para que las otras categorías mantuvieran los rasgos observados. Por ejemplo, una institucionalización orientada a la memoria dio pie a tareas de baja complejidad. Análogamente, tareas complejas bien gestionadas antecedieron una institucionalización con aportes sustantivos de los estudiantes.

Lo anterior, resulta coherente con el marco teórico de la tesis. La propuesta de un contrato didáctico implícito regulando las dinámicas entre profesor y estudiantes (Brousseau, Sarrazy y Novotná, 2014) permite explicar una cierta homogeneidad en lo observado en las distintas categorías. Este contrato regula las expectativas del profesor con los estudiantes y viceversa, por lo que podemos entender todas las dimensiones del sistema como manifestaciones de estas reglas y expectativas implícitas. Esto pudo observarse con mayor claridad en el caso de Pedro donde el contrato se volvía por momentos explícito, con intervenciones como “no les voy a decir la respuesta”, “no les dejen a otros la responsabilidad del saber”, donde las expectativas eran manifestadas de forma directa. Las dinámicas producto del contrato didáctico instalado en la clase de Pedro se reflejaron en todas las dimensiones.

Por otro lado, este carácter sistémico e integrado de las categorías permiten comprender la estabilidad de los grupos encontrados en el análisis de clusters, y el hecho de que el grupo de entornos reproductivos tuviera un promedio menor en todas las dimensiones al grupo de entornos activos. Así, entendemos el modelo empleado como una buena operacionalización del contrato didáctico en el aula.

Para ejemplificar las dinámicas al interior de cada caso, discutiremos lo observado a partir de las distintas categorías. Respecto a las categorías del modelo de entornos, se observó que tanto la *dificultad de las tareas* como la *institucionalización* fueron distintas en los casos estudiados, en la clase de Pedro la parte principal de la clase se estructuró en torno a tareas desafiantes, sin anticipar algoritmos ni estrategias de resolución. Luego, en la institucionalización, se incorporaron las ideas, preguntas y reflexiones surgidas en torno al trabajo en las tareas. En contraposición, en la clase de Aldo, la institucionalización o presentación de los contenidos ocurrió al principio, y consistió en la enseñanza de los pasos de distintos algoritmos, luego, las tareas estuvieron orientadas a la reproducción de esos algoritmos en ejercicios similares, de esta forma la elaboración de estrategias, ideas o aportes en general no resultó necesaria. Se debe señalar que un aspecto distintivo en cuanto a la gestión de las tareas fue el tiempo que cada profesor destinó a la resolución. Mientras que Pedro dejó tiempo suficiente para el trabajo individual y para la discusión en grupos pequeños y colectiva, Aldo no dispuso tiempo suficiente para abordar preguntas de reflexión.

Es posible relacionar este aspecto con los hallazgos de Aziza (2018) quien estudió el papel de las preguntas en el desarrollo creativo, identificando un efecto positivo en aquellas preguntas que comenzaban con *cómo* y *por qué*. A partir de nuestro marco conceptual

podemos concebir las preguntas por el *cómo* y el *porqué* de aspectos matemáticos como tareas desafiantes orientadas a generar reflexiones conceptuales. Por lo tanto, los hallazgos de Aziza están en concordancia con lo hallado en este estudio. Asimismo, estos hallazgos concuerdan con las investigaciones de Schoevers (2019), y Hershkowitz, et al. 2016, quienes mostraron la importancia de dar tiempo para que los alumnos construyan sus propias respuestas a los problemas que se proponen en el aula. Tanto las tareas como la gestión de las mismas, y la forma en que su desarrollo es incorporado en la institucionalización aparecen como elementos relacionados entre sí, y que permiten el desarrollo de la creatividad haciéndola necesaria para el trabajo en el aula.

Asimismo, la categoría *validación de las producciones* fue consistente al interior de cada caso. La clase de Pedro se caracterizó por involucrar activamente a los estudiantes en cada una de sus contribuciones y preguntas, responsabilizándolos por sostener la validez de sus ideas y pensar sobre las cuestiones surgidas en la clase. En el caso de Aldo, la responsabilidad del conocimiento estuvo puesta en el profesor, y los estudiantes no tuvieron necesidad de pensar en sus contribuciones y preguntas. Nuevamente, el contrato didáctico instalado permite explicar las distintas formas de validar las producciones, lo que responde a la manera de gestionar la autoridad del profesor sobre el conocimiento. En el caso de Aldo, se observó que tanto él como los estudiantes situaban en él a quien poseía- y por tanto debía señalar- el conocimiento correcto. El carácter de verdad del conocimiento matemático aquí radicaba en la autoridad del profesor. En el caso de Pedro, se establecía implícitamente que el carácter de verdad de los conocimientos matemáticos operaba en función de los argumentos de los estudiantes. Como sugieren Sarrazy y Novotná (2013) la forma en que

Aldo gestiona las producciones de los estudiantes es la más natural. Quien posee el conocimiento y quiere enseñarlo tiende a señalarlo de forma explícita, sin embargo, esto limita la capacidad de usar el conocimiento en situaciones nuevas, lo que es la prueba del aprendizaje.

La categoría emergente *gestión del error* permitió describir en detalle la forma en que reaccionaron los profesores ante los errores e imprecisiones de los estudiantes. En el caso de Aldo, la responsabilidad de aclararlos estuvo en el profesor, él fue quien los evidenció, y señaló de forma directa tanto los pasos a seguir como las respuestas esperadas, mientras que Pedro realizó preguntas a los estudiantes para que lograran identificar los errores, los que debieron reestructurar sus ideas para corregirlas o precisarlas. El levantamiento de esta categoría resultó valioso para describir la forma de gestionar las respuestas erradas de los alumnos, distinguiéndolo de la forma en que los profesores validaron otros tipos de producciones que no involucraban error, ya que en el tratamiento de los errores puede evidenciarse de forma clara el rol de los distintos actores en la producción del saber, justamente cuando ese saber resulta equívoco.

Respecto al tratamiento de los errores, Pitta-Pantazi, Kattou & Christou (2018) señalan la importancia de mantener un clima emocional seguro donde los errores no sean criticados. En ese sentido, nuestros hallazgos no identificaron casos donde los estudiantes recibieran críticas ante sus errores, sino más bien correcciones directas u omisiones. Así, se desprende la importancia de que los profesores logren identificar y posibilitar reflexiones a partir de los errores, poniendo en los estudiantes las herramientas y la responsabilidad para corregirlos.

Otro elemento que diferenció los casos fue la comunicación y la calidad de los diálogos en clases. En el caso de Pedro se observó que los estudiantes se comunicaron en torno a ideas matemáticas y, en conjunto, desarrollaron algunas reflexiones sobre estas ideas. En este sentido, los desacuerdos no fueron considerados como negativos. En el caso de Aldo, fue escasa la posibilidad de los estudiantes de establecer un diálogo en torno a ideas matemáticas, primero, porque la gestión del aula no les permitió dar continuidad a las ideas y, segundo, porque la validez de las ideas finalmente recaía en la autoridad del profesor, siendo sus aportes poco relevantes para la construcción de estas. En la misma línea Hershkowitz, Tabach y Dreyfus (2017) describen mediante un estudio de casos la forma en que las ideas creativas son el resultado de la acción comunicativa entre pares en la sala de clases. Este hallazgo propone la importancia de situar la atención a la forma en que ocurre la comunicación en la sala de clases, aspecto poco observado en otras pautas de análisis de clases de matemáticas.

Por otro lado, la categoría *disposición organizativa*, referida a la forma en que el profesor dispuso a los estudiantes en el aula, no tuvo una clara conexión con otras categorías ni capturó elementos ricos desde una perspectiva didáctica. Esto resulta coherente con lo obtenido en la fase cuantitativa, donde el análisis de clusters no mostró estabilidad al incorporar esta variable por lo que se quitó del modelo. En ese sentido parece poco relevante para el modelo de entornos didácticos propuesto en este estudio.

La categoría emergente *producciones creativas de los alumnos* aportó un elemento no considerado en el modelo de referencia, y que resultó crucial para abarcar las dinámicas del triángulo didáctico en su totalidad, así como para capturar la forma en que las otras

variables influyeron en las acciones de los estudiantes. Esta categoría, además, incorporó una definición de creatividad más amplia que en la fase cuantitativa de la tesis, no limitándola al desempeño en problemas de respuesta múltiple, sino que, abarcando distintas facetas de la creatividad matemática, como contribuciones referidas al diseño de estrategias, relaciones entre conceptos y preguntas. En el caso de la clase de Pedro, aparecieron diversas producciones creativas, como estrategias de solución a un problema, explicaciones y justificaciones creadas de forma autónoma por los alumnos, asociaciones de ideas matemáticas con contextos ajenos a la matemática y preguntas relevantes. En el caso de la clase de Aldo no surgieron producciones con estas características. Al examinar por qué estas producciones aparecen en un caso y no en el otro, puede establecerse que todas las dimensiones del modelo en su conjunto, operan colectivamente para posibilitar que estas surjan o no. La creatividad en el aula emerge producto del trabajo en tareas desafiantes, del tiempo que tienen para pensar en ellas y en sus propias preguntas, de la forma en que el profesor los incentiva a pensar por sí solos para hallar respuestas y el énfasis que pone el profesor en favorecer las discusiones entre estudiantes. Es decir, la creatividad no se da como un evento disruptivo o como el producto de la genialidad individual, sino que aparece en forma de ideas plausibles de ser pensadas por los estudiantes a partir de la interacción de todas las dimensiones analizadas.

En definitiva, estos casos son ejemplos concretos que representan los tipos de entornos hallados en este estudio y permiten comprender cómo los entornos didácticos pueden favorecer la creatividad. Estos casos tuvieron características particulares para ser

elegidos como buenos representantes de sus grupos, por lo que su análisis permite identificar las dinámicas en que las distintas categorías pueden operar en los distintos tipos de entornos.

En definitiva, este estudio propone una adaptación a las categorías observables en el aula del modelo propuesto por Sarrazy y Novotná (2013) que logra conceptualizar las dinámicas de los entornos didácticos observados en escuelas chilenas. Este modelo se compone de 7 categorías que actúan de forma conjunta y sistémica, a saber, dificultad de las tareas, institucionalización, validación de las producciones, posibilidades de comunicación, razonamiento lógico, gestión del error y producciones creativas de los estudiantes.

5.5. Consideraciones de la investigación

Una limitación ampliamente reconocida en las investigaciones sobre creatividad radica en la falta de una definición consensuada (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Mann, 2006; Sriraman, 2009, Haylock, 1987), por lo que los instrumentos psicométricos para su evaluación son también materia de debate. La operacionalización por la que optamos en la fase cuantitativa captura una parte de la creatividad matemática. Específicamente, se enfoca en la capacidad de responder problemas abiertos, lo que deja fuera la capacidad de plantear problemas o hallar relaciones entre objetos matemáticos. Si bien, es una aproximación a la capacidad creativa de los niños, se sugiere mirar los resultados de la fase cuantitativa con recato, comprendiendo que nos referimos a una parte de la creatividad. Aunque en la fase cualitativa de la tesis se incorporó una concepción más amplia de creatividad, es necesario que los estudios sobre este tema puedan avanzar hacia definiciones más precisas que contribuyan al diseño de instrumentos más complejos para su evaluación y posterior análisis cuantitativo.

Por otro lado, en esta investigación se emplearon modelos multinivel con un número de participantes adecuado para los objetivos propuestos. Este número se fijó considerando otros estudios con muestreos por conveniencia que estudiaron relaciones entre variables (e.g. Joet, Breassoux & Usher, 2011). Sin embargo, resulta deseable que estudios futuros, que involucren muestras representativas y con un N mayor, puedan ratificar o debatir los resultados hallados en esta tesis. Eso podría contribuir, por ejemplo, a comprender el efecto de las escuelas alternativas, ya que al incluir solo tres escuelas de este tipo no fue posible concluir nada al respecto, tema que puede ser de gran interés para dichos proyectos educativos.

Finalmente, la fase cualitativa estudió en profundidad dos cursos considerados paradigmáticos de los tipos de entornos hallados. Por razones metodológicas se eligieron cursos pertenecientes al nivel socioeconómico alto. Algunos elementos presentes en las descripciones realizadas podrían incorporar aspectos propios de este contexto socioeconómico. Considerando lo anterior, investigaciones futuras de corte cualitativo podrían involucrar estudiantes en contextos diversos, por ejemplo, escuelas rurales, marginalizadas y, en definitiva, pertenecientes a distintas realidades económicas y sociales. En particular, sería deseable realizar estudios de casos con escuelas en contextos de pobreza, atendiendo a la importancia de comprender cómo estos fenómenos se manifiestan en contextos que son más frecuentes en nuestro país.

5.6. Conclusiones

El presente estudio tuvo por propósito comprender la forma en que los entornos didácticos afectan la creatividad matemática de estudiantes chilenos de 5° año básico. A

partir de un diseño metodológico mixto secuencial explicativo, se concatenaron dos fases que, en conjunto, contribuyeron a indagar la relación entre las dinámicas del aula y su influencia en la creatividad.

Se logró evaluar la creatividad matemática de estudiantes de 5° básico a partir de la construcción y aplicación de un instrumento que capturó las tres dimensiones de creatividad descritas por la literatura: fluidez, flexibilidad y originalidad, con grados adecuados de confiabilidad y validez. Además, se caracterizaron los entornos didácticos (Sarrazy & Novotná, 2013) distinguiéndose dos tipos de entornos lo suficientemente distintos uno del otro y con características similares al interior de cada grupo. Denominamos a estos grupos *entornos activos* y *entornos reproductivos*. Los entornos activos se caracterizaron por una tendencia hacia el fomento de la autonomía de los estudiantes mediante dinámicas que gatillaban una mayor implicancia cognitiva de los estudiantes con el saber. Los entornos reproductivos, en cambio, tuvieron una tendencia hacia prácticas menos autónomas donde la responsabilidad del saber estuvo puesta en el profesor.

A partir del estudio de la relación entre los distintos tipos de entornos y la influencia en la creatividad de los estudiantes, se observó que aquellos alumnos que estuvieron en el grupo denominado *entornos didácticos activos*, con una enseñanza caracterizada por involucrarlos en la construcción de ideas, obtuvieron puntajes de creatividad matemática significativamente más altos que sus pares que estuvieron en el grupo denominado *entornos reproductivos*, una vez que se incorporaron las variables de control nivel socioeconómico, género, SIMCE y perfil de la escuela. Por otro lado, se obtuvo que el nivel socioeconómico y el género tuvieron un efecto significativo sobre los puntajes de los estudiantes en el test,

favoreciendo al nivel socioeconómico alto y a las niñas. No se obtuvieron resultados concluyentes sobre el efecto del SIMCE ni sobre el perfil de la escuela.

Un análisis cualitativo posterior, permitió comprender con mayor detalle la forma en que los distintos tipos de entornos influían en la creatividad de los estudiantes en el aula. Como resultado, se propuso una adaptación del modelo de análisis desarrollado por Sarrazy y Novotná (2013). El modelo resultante considera como aspectos clave para la descripción de las dinámicas del aula las categorías: dificultad de las tareas, institucionalización, validación de las producciones, posibilidades de comunicación, disposición organizativa, gestión de los errores, razonamiento y producciones creativas de los estudiantes. Estos elementos actúan en conjunto de forma sistémica e integrada para propiciar o limitar el surgimiento de la creatividad en el aula. A partir de su funcionamiento sistémico, estas categorías no pueden concebirse como aspectos separados que, por sí solos, permitan desarrollar el pensamiento creativo, sino como elementos que conforman las características de un contrato didáctico implícito entre profesor y alumnos que estimula e incorpora la creación de ideas.

Estos resultados contribuyen a la discusión en el área de los estudios sobre el desarrollo matemático creativo. Si bien, existe suficiente evidencia que indica que las pruebas de creatividad muestran un agrupamiento de la varianza a nivel de aula (e.g. Kanhai & Singh, 2016; Kwon, Park & Park, 2006), la relación entre el tipo de enseñanza de la matemática y el desarrollo creativo de los estudiantes no había sido profundizada, por tanto, esta tesis contribuye a caracterizar particularidades de los tipos de entornos que favorecen e inciden en el desarrollo matemático creativo, identificando el peso de variables contextuales.

Si bien el trabajo de Sarrazy y Novotna (2013) ya había propuesto una relación entre el contrato didáctico y la creatividad, los modelos estadísticos y la muestra empleada fueron acotados, por lo que se requerían nuevos estudios que profundizaran esta relación. En ese sentido, los resultados obtenidos de esta investigación respaldan y profundizan la propuesta de estos autores. Asimismo, la mirada integrada del modelo propuesto sitúa la concepción de las dinámicas del aula como un sistema complejo, por lo que la creatividad aparece como una habilidad que puede ser desarrollada a partir de una interacción de elementos. Este enfoque puede diferir de algunos estudios que indagaron la relación entre aspectos más aislados y el desarrollo creativo (eg. Shoevers et al. 2019; Pitta-Pantazi, Kattou & Christou, 2018; Aziza, 2018; Hershkowitz, Tabach & Dreyfus, 2017).

Asimismo, el modelo propuesto incluye elementos no considerados en los estudios revisados y que parecieran dar luces sobre el desarrollo creativo de los estudiantes, a saber, la validación de las producciones, el razonamiento lógico y la institucionalización. Por otro lado, este estudio incorpora un contexto latinoamericano con una muestra variada en cuanto a la composición social, aspecto poco considerado en otros estudios sobre el desarrollo creativo.

De los hallazgos descritos se desprenden algunas implicancias hacia el campo pedagógico, sin embargo, antes de adentrarnos en estas implicancias, se deben mencionar algunos aspectos estructurales que permiten aterrizar la forma en que estos resultados podrían ser útiles en el contexto educativo chileno y, en particular, en la formación docente.

Un primer elemento estructural identificado en los modelos aplicados, releva el papel del contexto social y económico como la variable que más impacta en el desarrollo creativo

de los estudiantes. Los resultados de este estudio muestran que, si bien los entornos didácticos tuvieron un efecto significativo sobre la creatividad, el nivel socioeconómico afectó en mayor medida los puntajes en el test que estar inmerso en un entorno activo. Tal como señalan los resultados de Dei et al. (2012) la creatividad se ve afectada por la suma de experiencias educativas tanto formales como informales, donde lo que realizan los profesores en el aula incide de forma significativa pero acotada. Por tanto, pensar en el fortalecimiento de las capacidades creativas de los estudiantes considerando únicamente la capacitación del profesorado pareciera ser limitado.

En relación con lo anterior, cabe mencionar otros aspectos a nivel del sistema escolar chileno que pueden significar estímulos hacia una pedagogía más tradicional y reproductiva. En este sentido, debe examinarse la medida en que las evaluaciones nacionales, que en muchos casos constriñen y guían los lineamientos de las escuelas, se enfocan en un tipo de pensamiento rudimentario y de bajo desafío cognitivo. Por ejemplo, en el marco de evaluación de la prueba SIMCE de matemática (Agencia de Calidad de la Educación, 2015) se señala que entre un 85% y un 90% de los ítems de la prueba evalúan las habilidades de conocimiento y aplicación, lo que definen como la capacidad de recordar conceptos y algoritmos y su uso simple en ejercicios conocidos. Lo anterior permite suponer que el desarrollo de habilidades complejas como la creatividad no parece ser prioritario al menos en los marcos evaluativos de estos instrumentos. Por tanto, los esfuerzos hacia el desarrollo de competencias docentes debieran contemplar aspectos cruciales como el lugar de las evaluaciones con foco memorístico, de modo de aunar los criterios que se proponen como relevantes.

Teniendo presente lo anterior, este estudio permitió levantar aspectos claves de la práctica en el aula que contribuyen a conformar entornos didácticos más propicios para el desarrollo creativo de los estudiantes. Estos aspectos están interrelacionados entre sí, y actúan de forma sistémica, por lo que su desarrollo no puede limitarse a una lista de acciones a ser incorporadas en la clase, sino que son manifestaciones de un contrato didáctico implícito, que recoge expectativas mayormente no verbalizadas por los actores del aula (Brousseau, Sarrazy y Novotná, 2015). El contrato didáctico que se instala entre un profesor y su grupo de estudiantes no es fácil de identificar y menos aún de modificar por el profesor, ya que involucra elementos complejos como las creencias sobre la matemática y su enseñanza, sus conocimientos matemáticos y sus competencias didácticas. Lo anterior sugiere que para promover entornos didácticos activos se requiere formar profesores con un fuerte foco tanto matemático como didáctico.

Respecto al lugar de la formación matemática en la formación inicial, según el marco conceptual que guía esta investigación una fuerte formación matemática involucra el espacio para el desarrollo creativo. Por tanto, es importante que los estudiantes de pedagogía tengan la posibilidad de aprender matemáticas de un modo desafiante y a partir de la resolución de problemas, con espacio para el desarrollo de estrategias de solución y elaboración de explicaciones y relaciones propias que den significado a los conceptos matemáticos, y que les permitan reforzar su capacidad de razonar matemáticamente. Lo anterior, parece fundamental para que el profesorado sea capaz de valorar, distinguir y fomentar las producciones creativas en la clase.

En cuanto a la formación didáctico-matemática de los futuros profesores, la capacidad para crear o identificar buenas tareas, y para gestionarlas apropiadamente e involucrar a los estudiantes en las conclusiones de la clase, requiere de un conocimiento didáctico bastante sofisticado. En particular parece relevante fomentar el análisis de los distintos tipos de tareas matemáticas y su potencial para desarrollar compromiso cognitivo, así como la reflexión de la forma en que estas tareas son gestionadas y cómo pueden ser vinculadas al currículum.

En cuanto a los profesores en ejercicio lo anterior es más difícil de integrar debido a los acotados tiempos con los que cuentan, sin embargo, un aspecto que podría contribuir es una formación continua enfocada en la vinculación entre el desarrollo de habilidades y objetivos de aprendizaje curriculares, ya que, mediante el trabajo en resolución de problemas, modelación, distintas representaciones y argumentaciones en el aula, los estudiantes tienen mayores posibilidades de construir ideas y estrategias propias.

Finalmente, es relevante mencionar que la forma en que estas capacidades pueden ser instaladas en el profesorado es un tema poco estudiado, por lo que sería valioso contar con estudios futuros que abordaran este tema.

6. BIBLIOGRAFIA

Agencia de Calidad de la Educación (2015) Informe Técnico SIMCE 2015. Santiago, Chile. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Informe_Tecnico_SIMCE_2015.pdf.

Alessandrini, N. (2017). Imaginación, creatividad y fantasía en Lev S. Vygotski: una aproximación a su enfoque sociocultural. *Actualidades en Psicología*, 31(122), 45-60.

Ayllón, M., Gómez, I., & Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, 4(1), 169-218.

Aziza, X. (2018) An Analysis of a Teacher's Questioning Related to Students' Responses and Mathematical Creativity in An Elementary School in The UK. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(4), 475-487.

Baer, J. (1996). The effects of task-specific divergent-thinking training. *The Journal of Creative Behavior*, 30(3), 183-187.

Baer, J., & Kaufman, J. (2008). Gender differences in creativity. *The Journal of Creative Behavior*, 42(2), 75-105.

Barbot, B., Besançon, M., & Lubart, T. (2016). The generality-specificity of creativity: Exploring the structure of creative potential with EPoC. *Learning and Individual Differences*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2016.06.005>.

Barquero, B., Richter, A., Barajas, M & Font, V. (2014). *Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades*. En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 157-166). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2009). Intellectual estuaries: Connecting learning and creativity in programs of advanced academics. *Journal of Advanced Academics*, 20, 296–324.

Beghetto, R & Kaufman, J. (2014) Classroom contexts for creativity, *High Ability Studies*, 25:1, 53-69, DOI: [10.1080/13598139.2014.905247](https://doi.org/10.1080/13598139.2014.905247)

Bickel, R. (2007). *Multilevel analysis for applied research: It's just regression!* Nueva York: Guilford Press.

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-11.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G., & Warfield, V. (2014). Didactic situations in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (163-170). Springer Netherlands.

Brousseau, G., Sarrazy, B. & Novotná, J. (2014). Didactic contract in mathematics education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (153-159). Dordrecht: Springer Netherlands.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37–47. <https://doi.org/10.4219/jsge-2005-393>

Corbalán Berná, J. (2008). ¿De qué se habla cuando hablamos de creatividad? *Cuadernos de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Universidad Nacional de Jujuy*, (35), 11-21.

Coxbill, E., Chamberlin, S. A., & Weatherford, J. (2013). Using Model-Eliciting Activities as a tool to identify creatively gifted elementary mathematics students. *Journal for the Education of the Gifted*, 36(2), 176–197. <https://doi.org/10.1177/0162353213480433>.

Creswell, J. (2014, 4ª edición) *Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approach*. SAGE Publications, Inc.

Cropley, A. J. (1996). Recognizing creative potential: An evaluation of the usefulness of creativity tests. *High ability studies*, 7(2), 203-219.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications of a systems perspective for the study of creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (313–335). Cambridge: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. 1998: *Creatividad el flujo y la psicología del descubrimiento y la invención*. Barcelona, Paidós.

Dai, D. Y., Tan, X., Marathe, D., Valtcheva, A., Pruzek, R. M., & Shen, J. (2012). Influences of social and educational environments on creativity during adolescence: Does SES matter? *Creativity Research Journal*, 24, 191–199.

Davies, D., Jindal-Snape, D., Collier, C., Digby, R., Hay, P., & Howe, A. (2012). Creative learning environments in education: A systematic literature review. *Thinking Skills and Creativity*, 8, 80–91.

Del Río, M. F., Strasser, K., y Susperreguy, M. I. (2016). ¿Son las habilidades matemáticas un asunto de género?: Los estereotipos de género acerca de las matemáticas en niños y niñas de Kínder, sus familias y educadoras. *Calidad en la educación*, 45, 20-53.

Deleuze, G. (1972) *Repetición y Diferencia: Introducción*. Barcelona: Cuadernos Anagrama.

Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., & Zannettou, E. (2009). Pupils' visual representations in standard and problematic problem solving in mathematics: Their role in the breach of the didactical contract. *European Early Childhood Education Research Journal*, 17(1), 95-110.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Echeverría, G. (2005). Análisis cualitativo por categorías. Apuntes docentes de metodología de investigación. Universidad Academia de Humanismo Cristiano. Escuela de Psicología. Santiago.

Evans, E. W. (1964). Measuring the ability of students to respond in creative mathematical situations at the late elementary and early junior high school level. *Dissertation Abstracts*, 25(12), 7-107.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In A. M. Thinking, & D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Springer.

Esquivias, S., (2004). Creatividad: definiciones, antecedentes y aportaciones. *Artículos*.

Fielding, A. (2006). *Cluster and classification techniques for the biosciences*. Nueva York: Cambridge University Press.

Freiman, V. (2018) Complex and Open-Ended Tasks to Enrich Mathematical Experiences of Kindergarten Students. F. M. Singer (ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness*, ICME-13 Monographs,

Ginsburg, H. (1996). Toby's math. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 175–282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill

Guzmán, M. de (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Pirámide, Madrid.

Hadamard J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Hashimoto, Y. (1997). The methods of fostering creativity through mathematical problem solving. *ZDM*, 29(3), 86-87.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59-71.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (1998). *Metodología de la investigación*. México DF: Mc Graw Hill.

Hershkovitz S. (2009): " Mathematical creativity and giftedness in elementary school: task and teacher promoting creativity for all" in R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (eds.). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, Chp. 16 pp. 255-269, SensePublishers

Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus, T. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*. 49(1), 25-36.

Huang, P. S., Peng, S. L., Chen, H. C., Tseng, L. C., & Hsu, L. C. (2017). The relative influence of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity*, 25, 1–9.

Ivcevic, Z., Brackett, M. A., & Mayer, J. D. (2007). Emotional intelligence and emotional creativity. *Journal of personality*, 75(2), 199-236.

Jankowska, D. M., & Karwowski, M. (2019). Family factors and development of creative thinking. *Personality and Individual Differences*, 142, 202-206.

Jensen, L. (1973). The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude and mathematical achievement. *Dissertation Abstracts International*, 34(05), 21-68.

Joët, G., Usher, E. & Bressoux, P. (2011). Sources of self-efficacy: An investigation of elementary school students in France. *Journal of educational psychology*, 103(3), 6-49.

Kanhai, A., & Singh, B. (2016). Some environmental and attitudinal characteristics as predictors of mathematical creativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 327-337.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 167-181.

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1016–1023). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague

Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four c model of creativity. *Review of general psychology*, 13(1), 1-12.

Kaufman, J. C., Beghetto, R. A., Baer, J., & Ivcevic, Z. (2010). Creativity polymathy: What Benjamin Franklin can teach your kindergartener. *Learning and Individual Differences*, 20(4), 380-387.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51-61.

Lee, K. & Seo, J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem-solving ability. *Research in Mathematical Education*, 7(3), 163-189.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 9, 129-145.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 159-166.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 55(4), 385-400.

Leikin, R., & Sriraman, B. (2017). Introduction to interdisciplinary perspectives to creativity and giftedness. In *Creativity and Giftedness* (pp. 1-3). Springer, Cham.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 295-308.

Liljedahl, P. & Sriraman, B. (2006). Musing on mathematical creativity. *For the learning of mathematics*, 26(1), 20-23.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An Affective Experience? *The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 253-265.

- Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In *Posing and Solving Mathematical Problems* (361-386). Springer International Publishing.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(1), 236– 230.
- Mann, E. (2009). The search for mathematical creativity: Identifying creative potential in middle school students. *Creativity Research Journal*, 21(4), 338-348.
- Mann, E., Chamberlin, S., & Graefe, A. (2017). The prominence of affect in creativity: Expanding the conception of creativity in mathematical problem solving. In *Creativity and Giftedness* (pp. 57-73). Cham: Springer.
- Martínez Carazo, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, 20(1).
- Martinic, S., Vergara, C., & Huepe, D. (2013). Uso del tiempo e interacciones en la sala de clases: un estudio de casos en Chile. *Pro-Posições*, 24(1), 123-135.
- MINEDUC (2012). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34961_Bases.pdf
- Murillo, F. (2008). Los modelos multinivel como herramienta para la investigación educativa. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 17(1), 45-62.
- Nadjafikhah, M., Yafthian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 285-291.
- Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME. (24th, Hiroshima, Japan, July 23-27).
- Novotná, J. & Sarrazy, B. (2010) Teacher's didactical variability and its role in mathematics education. *CERME 6—Working group 9*, 1625.
- Novotná, J. & Sarrazy, B. (2011). Didactical variability in teacher education. In *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 103-115). Boston: Springer US.
- OCDE (2012) Informe PISA 2012: Creative Problem Solving. Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf>

- Pascale, P. (2005). ¿Dónde está la creatividad? Una aproximación al modelo de sistemas de Mihaly Csikszentmihalyi. *Arte, individuo y sociedad*, 17.
- Pehkonen, E. (1997). The state of art in mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 63-67.
- Piirto, J. (1999). A survey of psychological studies in creativity. En Fishkin, B. Cramond and Paula Olszewski-Kubilius (Ed.) *Investigating creativity in youth: research methods* (pp. 27–49) Cresskill, NY: Hampton Press.
- Pinheiro, J., Bates, D., DebRoy, S., Sarkar, D. & Team, R. (2017). *_nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*. R package version 3.1-131, <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>
- Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: Their mathematical creative abilities. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 199-213.
- Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018) Mathematical Creativity: Product, Person, Process and Press. F. M. Singer (ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness*, ICME-13 Monographs,
- Poincaré, H. (2000). Mathematical creation. *Resonance*, 5(2), 85–94
- Polya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Preiss, D. D., Calcagni, E., Espinoza, A. M., Gómez, D., Grau, V., Guzmán, V., & Volante, P. (2014). Buenas prácticas pedagógicas observadas en el aula de segundo ciclo básico en Chile. *Psyke*, 23(2), 1-12.
- Prouse, H. (1967). Creativity in school mathematics. *Mathematics Teacher*, 60(3), 876–879.
- Plucker, J., (2004) The (Relatively) Generalist View of Creativity. *Creativity across domains: Faces of the muse*, 299-306
- R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Radovic, D., & Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico en Chile. *Psyke*, 19(2), 65-79.

Radovic, D. (2018). Diferencias de género en rendimiento matemático en Chile. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 221-242.

Rialp i Criado, A. (1998). El Método del Caso como técnica de investigación y su aplicación al estudio de la función directiva. Ponencia presentada en el IV Taller de Metodología ACEDE, celebrado en Arnedillo (La Rioja), 23-25 de abril de 1998. Universidad Autónoma de Barcelona.

Sarrazy, B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9–10 years. *European Journal of Psychology of education*, 17(4), 321-341.

Sarrazy, B., & Novotná, J. (2005). Didactical contract: Theoretical frame for the analysis of phenomena of teaching mathematics. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings SEMT 05* (pp. 33–44). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Sarrazy, B., & Novotná, J. (2013). Didactical contract and responsiveness to didactical contract: A theoretical framework for enquiry into students' creativity in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 281-293.

Schoevers, E. M., Kroesbergen, E. H., & Kattou, M. (2018). Mathematical Creativity: A Combination of Domain-general Creative and Domain-specific Mathematical Skills. *The Journal of Creative Behavior*.

Schoevers, E. M., Leseman, P. P., Slot, E. M., Bakker, A., Keijzer, R., & Kroesbergen, E. H. (2019). Promoting pupils' creative thinking in primary school mathematics: A case study. *Thinking Skills and Creativity*, 31, 323-334.

Sheffield, L. (2013). Creativity and school mathematics: some modest observations. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 325-332.

Sheffield, L. (2017). Dangerous myths about “gifted” mathematics students. *ZDM Mathematics Education*. 49(1), 13-23.

Shuk-kwan, S. L. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *ZDM*, 29(3), 81-85.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, 29(3), 75-80.

Simonton, D. K. (2004). Creativity in science: Chance, logic, genius, and zeitgeist. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sinclair, N., Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Digital, dynamic diagrams: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM Mathematics Education*, 45(3).

Singer, F., Sheffield, L., & Leikin, R. (2017). Advancements in research on creativity and giftedness in mathematics education: introduction to the special issue. *ZDM Mathematics Education*, 49(1), 5-12.

Singer, F. (2018) Enhancing Creative Capacities in Mathematically-Promising Students. Challenges and Limits. F. M. Singer (ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness*, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_1

Singh, B. (1987) The development of tests to measure mathematical creativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(2), 181-186

Singh, B. (2006). Differences in mathematical creativity of middle school children of different social groups. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(4), 541-544.

Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344-50.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 41(3), 13-27.

Sriraman, B., Yaftian, N., & Lee, K. H. (2011). Mathematical creativity and mathematics education: A derivative of existing research. In *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 119-130). Brill Sense.

Stein, M. I. (1953). Creativity and culture. *The journal of psychology*, 36(2), 311-322.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93-115). New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (2001). What is the common thread of creativity? Its dialectical relation to intelligence and wisdom. *American Psychologist*, 56(4), 360-62.

Sternberg, R. (2004). The domain generality versus specificity debate: How should it be posed? En J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.), *Creativity across domains: Faces of the muse* (pp. 299-306). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sternberg, R. J., Lubart, T. I., Kaufman, J. C., & Pretz, J. E. (2005). Creativity. In K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Eds.), *Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 351–370). Cambridge: Cambridge University Press.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related? *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 227-238.

Tabach, M and Alex Friedlander (2018) Instances of Promoting Creativity with Procedural Tasks. F. M. Singer (ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness*, ICME-13 Monographs,

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville: Scholastic Testing Service.

Vergnaud, G. (1983) A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems, en T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Voica, C., & Singer, F. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 267-279.

Wessels, H. (2014). Levels in mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(9), 22–40

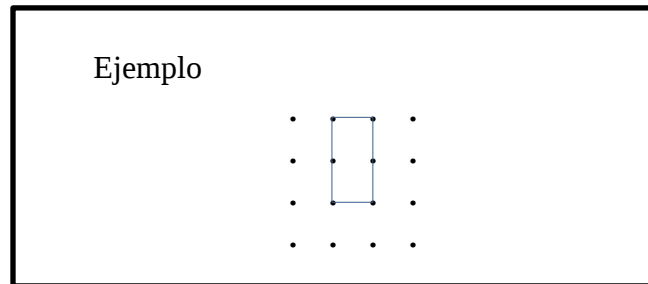
Whitehead, A. N. (1959). The aims of education. *Daedalus*, 88(1), 192-205.

Yin, R. K. (2002). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

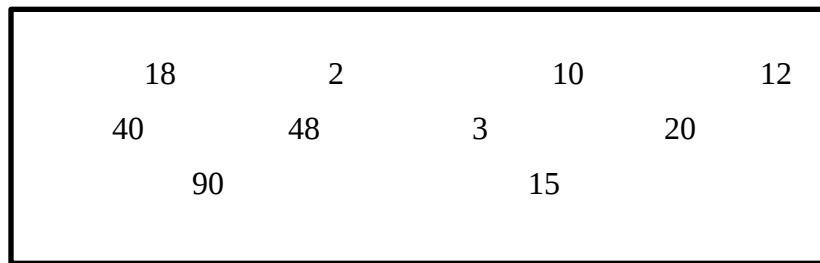
7. ANEXOS

Anexo 1: Ítems del test de creatividad matemática final

1. A continuación, hay 16 puntos dispuestos a 1 cm de distancia uno de otro. Forme figuras cuya área sea 2 cm^2 uniendo puntos. Dibuje tantas figuras distintas como sea posible.



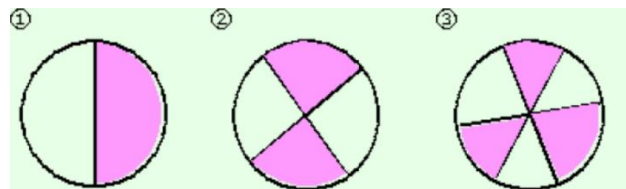
2. Utilizando los números que aparecen en el rectángulo proponga cálculos cuyo resultado final sea 30. Obtenga tantas respuestas distintas como pueda.



Por ejemplo: $10 + 10 + 10$ y $10 + 20$

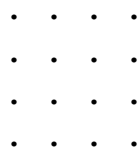
3. Divide un cuadrado y colorea algunas de sus partes, de manera tal que lo coloreado y lo no coloreado tengan la misma área.

Pista: El siguiente ejemplo muestra un círculo. Tú debes aplicar la instrucción a un cuadrado.



Anexo 2: Ítems que componen el piloto del test

1. A continuación, hay 16 puntos dispuestos a 1 cm de distancia uno de otro.



Forme figuras cuya área sea 2 cm^2 uniendo puntos. Dibuje tantas figuras distintas como sea posible.

2. En la figura se muestran 3 formas distintas de unir 3 hexágonos regulares haciendo coincidir al menos uno de sus lados.



Dibuje distintas maneras de unir **6 hexágonos regulares** haciendo coincidir al menos uno de sus lados. Muestre tantas formas distintas como pueda.

3. La edad de María y la de su hija Claudia, suman 54 años. La edad de María y la de su hijo Pablo, suman 51 años. La edad de Pablo y la de Claudia suman 21 años. ¿Cuántos años tiene cada uno? Explica tu solución. Intenta encontrar distintas maneras de resolver el problema.



54 años



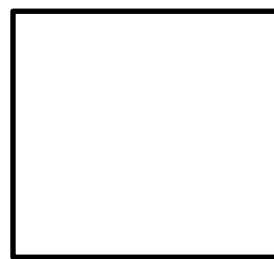
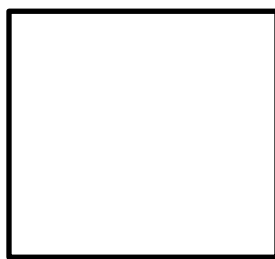
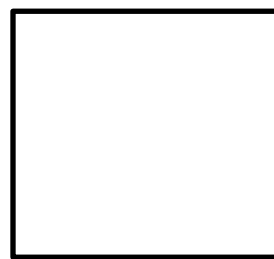
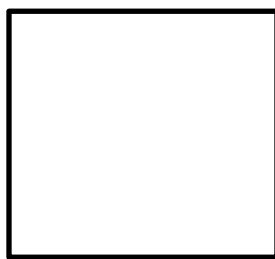
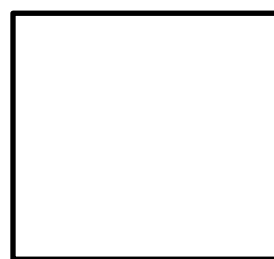
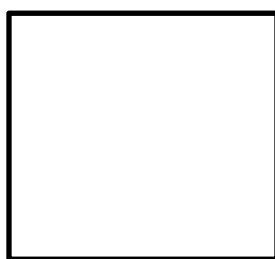
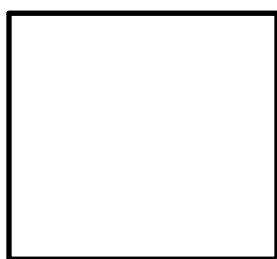
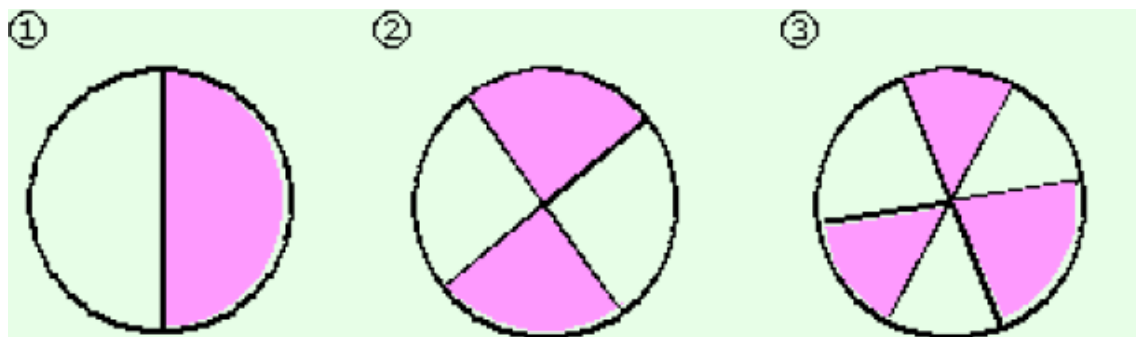
51 años



21 años

4. Divide un cuadrado y colorea algunas de sus partes, de manera tal que lo coloreado y lo no coloreado tengan la misma área.

Pista: El siguiente ejemplo muestra un círculo. Tú debes aplicar la instrucción a un cuadrado.



Anexo 3: Protocolo de aplicación del test

Protocolo de Toma de Test de Creatividad Matemática

Este protocolo indica lo que tienen que hacer los(las) ayudantes que toman el test de creatividad matemática. El rol del (de la) ayudante es muy importante, ya que es él (la) responsable de que la prueba se desarrolle en condiciones adecuadas para todos los estudiantes. Es muy importante que siempre mantenga una actitud seria y respetuosa y que se adhiera fielmente a las instrucciones de este protocolo.

Preparación inicial de la prueba:

1. Ayudante lee este protocolo con detalle.
2. Ayudante conversa con profesor(a) a cargo del curso. Debe informar al docente que puede estar en la sala contribuyendo a regular la conducta durante la toma del test.

Preparación inicial de la prueba:

1. El ayudante se presentará comentando a los estudiantes que esta prueba busca detectar qué tan buenos son resolviendo desafíos matemáticos.
2. El ayudante tiene que solicitar que cada estudiante tome un lápiz, goma y sacapuntas. Está permitido el uso de regla y lápices de colores.
3. El ayudante repartirá una prueba a cada estudiante, les pedirá que escriban su nombre y leerá las instrucciones en voz alta.
4. El ayudante explica que si tienen alguna pregunta deben levantar la mano y él irá a cada puesto resolviendo dudas.
5. El ayudante explicará que si los estudiantes encuentran más soluciones a las preguntas 1 y 3 pueden hacerlas al reverso de la hoja. No hay límite en la cantidad de respuestas posibles.

Duración

Se cuentan 60 minutos una vez que las instrucciones han sido leídas. Los estudiantes que terminen antes, pueden hacer un dibujo en la parte trasera de la prueba o esperar en silencio.

Gestión de dudas de los estudiantes

El ayudante puede ayudar resolviendo dudas sin entregar respuestas correctas. Si un alumno no entiende la pregunta, el ayudante puede explicar el encabezado y las instrucciones, y **puede recordar la fórmula del área si un alumno lo solicita expresamente**. Si un estudiante pregunta si un resultado es correcto o no, el ayudante no debe responder de manera tajante. Puede responder cosas del estilo ¿qué crees tú? ¿corresponde a lo que te están pidiendo?

Ingreso de estudiantes atrasados

Los estudiantes atrasados pueden ingresar y rendir la prueba, pero no se les va a dar tiempo extra.
El ayudante debe marcar las hojas con los estudiantes que presenten 15 minutos de atraso o más.

Término de la prueba

Transcurridos 60 minutos, el ayudante retirará todas las pruebas. Es necesario revisar que hayan anotado sus nombres.

Entrega de pruebas a encargado

Al final de la prueba, el ayudante pondrá los test en un sobre y los entregará a la directora del proyecto.

Sobre la evaluación de la prueba

El ayudante no dirá si el test es con nota o no salvo que los estudiantes lo pregunten expresamente, en ese caso, el ayudante dirá: “no, no es con nota en su libro de clases, pero es muy importante que respondan todo lo que puedan, porque es para una investigación que permitirá descubrir qué tan ingeniosos son resolviendo estos desafíos”

Anexo 4: Rúbrica de puntuación de test de creatividad matemática

Ítem	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad
1	0: 0 respuestas correctas 1: 1 o 2 respuestas correctas 2: 3 o 4 respuestas correctas 3: 5 o 6 respuestas correctas 4: 7 u 8 respuestas correctas 5: 9 o 10 respuestas correctas 6: 11 o 12 respuestas correctas	Suma de las distintas estrategias empleadas E1: Triángulos básicos E2: Unión de dos cuadrados E3: Cuadriláteros E4: Figuras obtenidas a partir de juntar 4 triángulos. E5: Triángulos no triviales E6: Usando puntos medios de los cuadrados. E7: Usando líneas curvas	0: No emplea estrategias e4, e5, e6 ni e7 3: la estrategia más sofisticada es e4 4: la estrategia más sofisticada es e5 5: la estrategia más sofisticada es e6 6: la estrategia más sofisticada es e7
2	0: 0 respuestas correctas 1: 1 o 2 respuestas correctas 2: 3 o 4 respuestas correctas 3: 5 o 6 respuestas correctas 4: 7 u 8 respuestas correctas 5: 9 o 10 respuestas correctas 6: 11 o más respuestas correctas	Suma de las distintas estrategias empleadas E1: Usa 3 números o menos E2: Usa 4 números o más E3: Usa 3 operaciones matemáticas o más en un mismo ejercicio. E4: Usa símbolos distintos de las 4 operaciones básicas.	0: No emplea estrategias e3 ni e4 3: la estrategia más sofisticada es e3 4: la estrategia más sofisticada es e4
3	0: 0 respuestas correctas 1: 1 o 2 respuestas correctas 2: 3 o 4 respuestas correctas 3: 5 o 6 respuestas correctas 4: 7 u 8 respuestas correctas 5: 9 respuestas correctas	Suma de las distintas estrategias empleadas E1: Soluciones parecidas al ejemplo E2: Divide el cuadrado en partes iguales y pinta la mitad de ellas. E3: Divide el cuadrado en partes de distinta área E4: Divide el cuadrado usando líneas zigzagueantes. E5: Usa punto medio y líneas quebradas. E6: Usa punto medio y líneas curvas.	0: No emplea estrategias e3, e4, e5 ni e6 2: la estrategia más sofisticada es e3 o e4 4: la estrategia más sofisticada es e5 o e6

Anexo 5: Actividad de invención de problemas de los profesores

INVENTANDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Proponga 6 problemas matemáticos para estudiantes de 5° básico que aumenten en su nivel de dificultad. Tres de estos problemas deben requerir adición en su resolución y los otros tres, deben requerir sustracción.

- A. Tres problemas que puedan ser resueltos usando **adición**, y que varíen en su dificultad.

Menor dificultad
Dificultad intermedia
Mayor dificultad

- B. Tres problemas que puedan ser resueltos usando ***sustracción***, y que varíen en su dificultad.

Menor dificultad
Dificultad intermedia
Mayor dificultad

Anexo 6: Manual de codificación de entornos didácticos

Introducción

El siguiente documento, describe el modelo de análisis de entornos didácticos descrito por Sarrazy & Novotná (2010). Cada entorno didáctico puede describirse a partir de 6 dimensiones. Estas se presentan a continuación:

Estructura didáctica de la lección

1. Dificultad de las tareas
2. Institucionalización del saber
3. Validación de las producciones de los estudiantes

Organización social de los estudiantes

4. Posibilidades de comunicación de los estudiantes
5. Disposición organizativa de los estudiantes

Capacidad de variabilidad didáctica del profesor en la creación de problemas matemáticos

6. Análisis de variabilidad en base a 14 variables.

Este modelo de análisis será aplicado a cada profesor con su respectivo 5° básico a partir de 2 tipos de datos diferentes. Las dimensiones de la 1 a la 5 se obtienen de la observación de los videos de clases de matemática. La dimensión 6 y sus 14 variables asociadas, se obtienen del análisis de 6 problemas matemáticos que los profesores han creado por petición de los investigadores. A continuación, se describen cada uno de los indicadores y dimensiones que componen el modelo de análisis de entornos didácticos.

I. ESTRUCTURA DIDÁCTICA DE LA LECCIÓN

Esta dimensión captura lo que el profesor realmente hace para enseñar un determinado conocimiento. Se compone de 3 indicadores: Dificultad de las tareas, Institucionalización del saber, modos de validación de las producciones.

Para completarlo, usted debe observar dos clases consecutivas de un mismo profesor y marcar todos eventos que aparezcan en un bloque de 20 minutos. Al cabo de las dos clases usted tendrá 8 bloques de 20 minutos codificados.

1. Dificultad de las tareas			
Los estudiantes se enfrentan a tareas que presentan un mismo nivel de dificultad, o el profesor pasa de tareas simples a complejas y/o vice-versa.			
Tareas triviales	Aplicación directa	Aplicación en contextos	Problemas o tareas de descubrimiento
El profesor presenta a sus estudiantes tareas que requieren el recuerdo de lo aprendido en la lección, o en la lección anterior. Preguntas que requieren respuestas de memoria, coreadas por toda la clase. No se requiere tiempo para pensar.	El profesor presenta a la clase, preguntas o ejercicios que requieren la aplicación de un algoritmo que los niños ya conocen, o que están en vías de adquirir.	El profesor plantea a la clase problemas o ejercicios aplicados en contextos, que requieren de la comprensión del enunciado más la aplicación de un algoritmo que los estudiantes conocen o están en vías de adquirir.	El profesor plantea a la clase problemas cuya resolución no es conocida a priori por los estudiantes, la respuesta a esos problemas es el aprendizaje que el profesor pretende generar.

2. Institucionalización del saber			
El profesor presenta un concepto o un procedimiento antes o después que los niños han intentado buscar por sí mismos las respuestas.			
Al principio	Después de una pregunta trivial o breve	Después de una pregunta que promueve el pensamiento	Después de un problema
El profesor presenta (o recuerda) el saber matemático, un concepto o procedimiento al principio de la clase o de la actividad.	El profesor presenta (o recuerda) un saber matemático, concepto o procedimiento, después de realizar preguntas. Pero no da tiempo a pensar suficiente, las preguntas son triviales o el profesor da las respuestas sin esperar el desarrollo por parte de los alumnos.	El profesor realiza una pregunta y da tiempo a que los estudiantes respondan, no son preguntas triviales, si no que requieren desarrollo o reflexión. El profesor modela las respuestas.	El profesor presenta un problema para el cual no se conoce previamente el modo de resolución. Los estudiantes trabajan en las soluciones. El profesor, al final de la clase o actividad, modela las soluciones. Los estudiantes han construido por sí mismos alguna idea matemática y el profesor las valida.

3. Modos de validación de las producciones			
De qué manera el profesor responde a las preguntas o producciones de los estudiantes: si el profesor dice directamente la respuesta correcta, si devuelve la pregunta o la modifica, y además si este tipo de respuesta es constante o cambia en distintos momentos de la clase.			
Profesor ignora	Profesor da respuesta	Profesor explica respuesta	Profesor pide justificación/ Devuelve pregunta
Un estudiante hace un comentario (pregunta o afirmación correcta o incorrecta) y el profesor no responde, ni valida, ni advierte error	Un estudiante hace un comentario (pregunta o afirmación correcta o incorrecta) y el profesor da respuesta, o dice “está bien” o “está mal”.	Ante la pregunta de un niño el profesor explica una respuesta a la pregunta, la explicación debe ser consistente. Ante una afirmación correcta o incorrecta el profesor parafrasea y explica por qué tal afirmación es correcta o no.	Ante una afirmación correcta el profesor pide al alumno (o a otro) explicar por qué tal afirmación es correcta. Ante un error el profesor sigue el argumento pidiendo al niño justificar su afirmación hasta que este entienda que está errado. Ante una pregunta el profesor la reformula o la plantea a otros

II. ORGANIZACIÓN SOCIAL DE LOS ESTUDIANTES

Estas dimensiones capturan las formas de organización social de los estudiantes. Para ello observa dos indicadores: Posibilidades de comunicación de los estudiantes y Disposición organizativa de los estudiantes.

Para completarlo, al igual que en la dimensión anterior, usted debe observar las dos clases consecutivas de un mismo profesor y marcar todos eventos que aparezcan en un bloque de 45 minutos. Al cabo de las dos clases usted tendrá 4 bloques de 45 minutos codificados.

4. Posibilidades de comunicación de los estudiantes			
Analiza si los estudiantes pueden comunicarse con otros estudiantes y/o con el profesor en el transcurso de la clase.			
Entre pares (parejas)	Entre pares (grupos pequeños)	Alumnos con el profesor	Alumnos con la clase completa
Los estudiantes discuten sobre tareas matemáticas con un compañero	Los estudiantes discuten sobre tareas matemáticas con un grupo pequeño de compañeros	Los estudiantes pueden comunicarse con el profesor, de manera individual o en una plenaria	Los estudiantes pueden comunicarse con otros estudiantes en una plenaria, con o sin mediación del profesor. Alumnos discuten sobre ideas de otros compañeros, con o sin la solicitud directa del profesor.

5. Disposición organizativa de los estudiantes			
Observa el modo en que los estudiantes están dispuestos en la sala de clases, de pares, de grupos o de manera individual			
Individual	Pares	Grupos pequeños	Círculo grupal
Los alumnos se sientan en puestos individuales, en columnas, uno detrás de otro con espacio entre las filas.	Los alumnos se sientan en pares	Los alumnos se sientan en grupos pequeños	El curso es sentado en un círculo de discusión grupal

III. Capacidad de variabilidad didáctica del profesor en la creación de problemas matemáticos

La tercera dimensión busca identificar la capacidad del profesor para inventar problemas que sean variables en cuanto a sus niveles de dificultad. Para ello se analizan problemas creados por el profesor y se analizan en términos numéricos, retóricos y semántico-conceptuales. Esto da cuenta de la capacidad del profesor de presentar a sus estudiantes problemas que requieran distintos tipos de acciones.

Para completar esta dimensión, usted debe analizar cada uno de los 6 problemas propuestos por el profesor, a partir de las siguientes 14 variables correspondientes a variables numéricas, retóricas y semántico-conceptuales.

La siguiente tabla resume las 14 variables analizadas para cada problema. Abajo, cada una de las 14 variables es explicada en detalle.

Tipo de variable	Código	Modalidad evaluadas					
<i>Variables numéricas</i>							
1 Tipos de números utilizados	TN	Requiere algoritmo			No requiere		
2 Datos irrelevantes	ID	Presencia			Ausencia		
<i>Variables retóricas</i>							
3 Índice semántico	SI	Presencia			Ausencia		
4 Contextos familiares	TF	Presencia			Ausencia		
5 Disparador semántico	DE	Presencia			Ausencia		
6 Organización sintagmática y organización temporal	SO TO	Coincide			No coincide		
7 Posición de la pregunta	PQ	Inicio	Medio	Final			
8 Vocabulario	LF	Conocido			Desconocido		
9 Formulación	FO	Clásico			Narrativo		
<i>Variables semántico-conceptuales</i>							
10 Estructura aditiva	TY	1	2	3	4	5	6
11 Naturaleza de lo desconocido	UN	Inicial			Final		
12 Correspondencia orden sintagmático y orden operativo	SO OP	Coincidencia			No coincidencia		
13 Correspondencia desencadenante y operador matemático	DE M	Coincidencia			No coincidencia		
14 Correspondencia índice semántico y el operador matemático	SI M	Coincidencia			No coincidencia		

1. Tipo de números utilizados	
Los valores numéricos juegan un papel importante en la complejidad. Sin embargo, el tamaño de los números no es una variable fácil de medir. ¿Cuál es el umbral después del cual puede decir que un número se considera "grande"? Elegimos como criterio el efecto del tamaño de los números en las estrategias de cálculo que implicó esta elección (es más fácil calcular la diferencia entre 11,000 y 12,000 que entre 136 y 68):	
Requiere algoritmo	No requiere algoritmo
El problema exige que el alumno tenga que usar un procedimiento canónico para calcular su suma o su diferencia. EJ: $25 - 17$, $123 + 58$	El problema permite que el alumno puede usar un procedimiento diferente al procedimiento canónico (contar con los dedos, usar el procedimiento complementario). Números hasta 20, números que puedan redondearse, números múltiplos de 10. Ej: $10 - 6$, $10.000 + 2.000$, $15 + 5$

2. Datos irrelevantes	
Independientemente del nivel del tema, la presencia de datos irrelevantes ralentiza significativamente el proceso de resolución, incluso si es obvio que estos datos son irrelevantes. Entendemos por dato irrelevante a las variables numéricas que no deban emplearse en la resolución final del problema.	
Presencia	Ausencia
El problema contiene datos irrelevantes. Por ejemplo: Ana compró 5 naranjas, se demoró 3 días en llegar a casa y se comió 2 en el camino. ¿Cuántas le quedaron?	El problema no contiene datos irrelevantes. Todos los números que aparecen en el problema son necesarios para el proceso de resolución.

3. Índice semántico	
Un índice semántico corresponde a una unidad semántica que reúne un concepto y una expresión verbal que puede limitarse a una sola palabra. Esta unidad semántica ejerce una función específica en la formulación, al marcar un proceso de acumulación o comparación. Por ejemplo: comprar, vender, quitó, agregó, tantas veces más, etc.).	
Presencia	Ausencia
El problema contiene en su redacción la presencia de un índice semántico	El problema no contiene en su redacción la presencia de un índice semántico

4. Contextos familiares	
Se examina el contexto en que está situado el problema clasificando este según lo cercano o no que pueda resultar para niños de 5° básico.	
Sí	No
Los problemas están situados en contextos que resultan familiares para los alumnos: compras en un mercado, juguetes, juegos, situaciones hogareñas, edades, etc.	Los problemas incluyen contextos no tan cercanos a los niños: contextos de profesiones alejadas a su experiencia, contextos puramente abstractos o matemáticos, etc.

5. Disparador semántico	
Un disparador es una unidad semántica en la pregunta que induce un tipo de operación. Por ejemplo, en la pregunta "¿Cuántas manzanas le quedan en total?", "en total" induce una suma, "cada" una división, etc.	
Presencia	Ausencia
El problema contiene en su redacción un disparador semántico	El problema no contiene en su redacción un disparador semántico

6. Organización sintagmática y organización temporal	
Aquí se han distinguido dos tipos de organización: • organización sintagmática, que corresponde al orden de los eventos en el problema; • organización temporal, que corresponde al orden de los eventos en la realidad.	
Coincidencia	No coincidencia
La organización sintagmática coincide con la organización temporal	La organización sintagmática no coincide con la organización temporal Ej: Carlos comió una manzana de las 5 que llevaba en su bolsa ¿cuántas le quedaron?

7. Posición de la pregunta		
La posición de la pregunta puede encontrarse en distintas posiciones respecto al enunciado del problema.		
Al comienzo	Al medio	Al final
El problema comienza con la pregunta que indica lo que el estudiante debe encontrar	La pregunta se ubica en medio de la redacción del problema	La pregunta está al final del problema

8. Vocabulario utilizado	
Los problemas pueden ser más fáciles o más difíciles dependiendo de si el vocabulario utilizado es familiar para el alumno o no	
Vocabulario conocido	Vocabulario desconocido
El problema emplea palabras sencillas y familiares a niños de 5° básico	El problema contiene algunas palabras que podrían resultar complejas para niños de 5° básico.

9. Tipo de formulación	
¿Son los procesos utilizados por los sujetos análogos cuando el problema es de forma abierta (narrativa) o cerrada (clásica)?	
Clásico	Narrativo
El problema usa frases cortas y precisas y contiene solo la información necesaria para su resolución.	El problema relata eventos y detalles ricos narrativamente, pero que podrían distraer a los alumnos

10. Tipo de estructura aditiva					
Consideremos las siguientes dos expresiones: "A tiene 6 x menos que B" y "A perdió 6 x"; si, desde el punto de vista del álgebra, los dos son equivalentes, desde el punto de vista semántico-conceptual no lo son. El origen de estas dificultades no radica en el cálculo numérico, sino en el cálculo relacional. Clasifique el problema en uno de los siguientes 6 tipos.					
1	2	3	4	5	6
Se combinan dos medidas para producir una medición	Se opera una transformación en una medición para producir una medición	Una relación vincula dos mediciones	Dos transformaciones combinadas producen una transformación	Una transformación se opera en un estado relativo para producir un estado relativo	Dos estados relativos se combinan para producir un estado relativo
11. Naturaleza de lo desconocido					
Para el mismo problema, la elección de lo desconocido puede causar dificultades muy diferentes. Cualquiera que sea la edad de los alumnos, los problemas en los que deben encontrar el estado final se resuelven con más frecuencia que aquellos en los que es el estado inicial lo desconocido.					
Estado inicial desconocido			Estado final desconocido		

Lo que se desconoce y debe hallarse en el problema corresponde al estado inicial de la situación presentada. Ej. Perdí 6 bolitas y me quedan 9 ¿cuántas tenía antes de perder las bolitas?	Lo que se desconoce y debe hallarse en el problema corresponde al estado final de la situación presentada. Ej. Tengo 15 bolitas y pierdo 9, ¿cuántas me quedan?
---	--

12. Correspondencia entre el orden sintagmático (SO) y el orden operativo (OP)	
Aquí podemos distinguir dos tipos de organización: • el orden operativo corresponde al orden en que se utilizan los datos en el cálculo numérico • la organización sintagmática corresponde al orden de aparición de los datos numéricos en la explicación del problema. El problema es más fácil cuando las dos órdenes coinciden	
Coincidencia	No coincidencia
El orden operativo coincide con el orden sintagmático	El orden operativo no coincide con el orden sintagmático

13. Correspondencia entre el desencadenante (DE) y el operador matemático (M)	
El desencadenante es una unidad semántica de la pregunta que puede inducir un tipo de operación. Usamos las palabras "operador matemático" para referirnos al tipo de operación requerida por el problema (aquí es suma o resta). Por lo tanto, son posibles dos tipos de casos: o son idénticos ("+" "+", "-" "-") o son diferentes ("-" "+", "+" "-").	
Coincidencia	No coincidencia
El desencadenante coincide con el operador matemático.	El desencadenante no coincide con el operador matemático.
14. Correspondencia entre el índice semántico (SI) y el operador matemático (M)	
Un índice semántico ejerce una función específica en la formulación, al marcar un proceso de acumulación o comparación. Por ejemplo: comprar, vender, quitó, agregó, tantas veces más, etc.	
Coincidencia	No coincidencia

El índice semántico coincide con el operador matemático.	El índice semántico no coincide con el operador matemático.
--	---

Anexo 7: Problemas creados por los profesores del estudio de casos

Pedro:

Problemas de adición
Menor dificultad Un recipiente tiene capacidad para 50 litros de agua, mientras que otro tiene capacidad para 35 litros. ¿Cuántos litros de agua se pueden contener en total en los dos recipientes?
Dificultad intermedia Habitualmente, un niño se demora 15 minutos a pie del colegio a su casa. Si un día se tarda 8 minutos por sobre el tiempo habitual, ¿cuánto tiempo tardaría en total ese día?
Mayor dificultad Un Padre tiene el triple de la edad de su hijo más 4 años. Si el hijo tiene 11 años ¿Qué edad tiene el padre?

Problemas de sustracción
Menor dificultad Un niño tenía \$26.500 y perdió \$15.000. ¿Con cuánto dinero se quedó?
Dificultad intermedia Un colegio tiene 1.253 alumnos, mientras que otro colegio tiene 1.347 alumnos. ¿Cuál es la diferencia en la cantidad de alumnos entre ambos colegios?
Mayor dificultad Para una ramada de 18 de septiembre, se vendieron 872 artículos, superando en 143 artículos a las ventas del año anterior. ¿Cuántos artículos se vendieron el año pasado?

Aldo:

Problemas de adición
Menor dificultad Luis tenía \$30 mil y su abuelo le regaló \$ 5 mil, ¿cuánto dinero tiene ahora?
Dificultad intermedia Una empresa de telefonía móvil tiene aproximadamente 530.000 clientes en Chile y 715.000 clientes en otros países de Sudamérica. ¿Cuántos clientes tienen en total?
Mayor dificultad Una empresa se forma por dos socios: Aníbal que aporta \$34.867.203 y Carla que aporta \$48.923.013. ¿Cuál fue el aporte total de los socios?

Problemas de sustracción
Menor dificultad Ana compró un pantalón que valía \$22 mil y le hicieron una rebaja de \$5 mil, ¿cuánto pagó por la prenda?
Dificultad intermedia Jaime vendió su auto en \$4 millones, y con ese dinero más un préstamo, se compró otro en \$9 millones, ¿cuánto dinero pidió prestado?
Mayor dificultad Andrea vendió su casa en \$39.975.000 y compró un departamento en \$33.372.500. ¿Cuánto dinero le sobró luego de la compra del departamento?